



Saad BENNIS

# Hydraulique et hydrologie

2<sup>e</sup> édition  
REVUE ET  
AUGMENTÉE



Université du Québec  
École  
de technologie  
supérieure



Presses  
de l'Université  
du Québec

# Hydraulique et hydrologie

2<sup>e</sup> édition  
REVUE ET  
AUGMENTÉE



PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC  
Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450  
Québec (Québec) G1V 2M2  
Téléphone: 418-657-4399 • Télécopieur: 418-657-2096  
Courriel: puq@puq.ca • Internet: www.puq.ca

Diffusion / Distribution :

**CANADA et autres pays**

PROLOGUE INC.  
1650, boulevard Lionel-Bertrand  
Boisbriand (Québec) J7H 1N7  
Téléphone : 450-434-0306 / 1 800 363-2864

**FRANCE**

AFPU-DIFFUSION  
SODIS

**BELGIQUE**

PATRIMOINE SPRL  
168, rue du Noyer  
1030 Bruxelles  
Belgique

**SUISSE**

SERVIDIS SA  
Chemin des Chalets  
1279 Chavannes-de-Bogis  
Suisse



La *Loi sur le droit d'auteur* interdit la reproduction des œuvres sans autorisation des titulaires de droits. Or, la photocopie non autorisée – le « photocopillage » – s'est généralisée, provoquant une baisse des ventes de livres et compromettant la rédaction et la production de nouveaux ouvrages par des professionnels. L'objet du logo apparaissant ci-contre est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit le développement massif du « photocopillage ».

Saad BENNIS

# Hydraulique et hydrologie

2<sup>e</sup> édition  
REVUE ET  
AUGMENTÉE



Université du Québec  
École  
de technologie  
supérieure

2009



Presses  
de l'Université  
du Québec



*Catalogage avant publication de Bibliothèque  
et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada*

Bennis, Saad, 1957-

Hydraulique et hydrologie

2<sup>e</sup> éd. rev. et augm.

Publ. en collab. avec: École de technologie supérieure.

ISBN 978-2-7605-1521-5 (PUQ)

ISBN 978-2-9211-4563-3 (ETS)

1. Hydraulique. 2. Hydrologie. 3. Fluides, Mécanique des. 4. Cycle hydrologique.  
5. Hydraulique - Problèmes et exercices. 6. Hydrologie - Problèmes et exercices. I. Université  
du Québec. École de technologie supérieure. II. Titre.

TC145.B46 2007      532      C2007-941565-2

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada  
par l'entremise du Programme d'aide au développement  
de l'industrie de l'édition (PADIE) pour nos activités d'édition.

La publication de cet ouvrage a été rendue possible  
grâce à l'aide financière de la Société de développement  
des entreprises culturelles (SODEC).

Révision linguistique: JULES RICHARD

Mise en pages: ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

Photographie de la couverture: RONALD MAISONNEUVE

Direction artistique: YVES TOUGAS

1 2 3 4 5 6 7 8 9 PUQ 2009 9 8 7 6 5 4 3 2 1

*Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés*

© 2007 Presses de l'Université du Québec

Dépôt légal – 4<sup>e</sup> trimestre 2007

Bibliothèque et Archives nationales du Québec / Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

À Ismaël, Nora, Maria,  
Youssef et Malika.

J'ai pris de votre temps  
pour préparer cet ouvrage.



## ***Remerciements***

Je tiens à remercier très particulièrement le professeur Étienne Windisch, ing., Ph. D., qui a veillé à la préparation et à la mise en forme de ce document.

Je remercie les étudiants en doctorat Marouane Temimi et Éric Crobeddu, qui ont participé à l'élaboration d'une ébauche de solutions pour les problèmes proposés à la fin des chapitres.

Je remercie également le professeur Pierre Lemieux, ing., Ph.D., vice-doyen à la recherche à l'Université de Sherbrooke, pour la révision scientifique de l'ouvrage.

Finalement, je remercie tous les collègues dont les ouvrages et les publications scientifiques m'ont aidé dans la préparation de ce travail. Ces références bibliographiques sont citées à la fin de chaque chapitre.

# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements .....	IX
Avant-propos .....	XIX
<b>CHAPITRE 1 Équations de conservation de la masse</b> .....	1
1.1 Définitions. ....	2
1.2 L'équation de continuité – forme intégrale .....	4
1.2.1 Formulation générale .....	4
1.2.2 L'équation de continuité pour un fluide incompressible. ....	4
1.2.3 Cas particuliers courants pour les conduites sous pression .....	5
1.2.3.1 Conduite pleine avec diamètre constant. ....	5
1.2.3.2 Conduite pleine avec changement de diamètre .....	6
1.2.3.3 Application de l'équation de continuité aux réservoirs .....	8
1.3 Autres formes courantes de l'équation de continuité .....	11
1.3.1 Définitions. ....	11
1.3.2 Volume de contrôle infinitésimal fixe .....	11
1.3.3 Application aux écoulements souterrains .....	14
1.3.4 Application aux écoulements à surface libre. ....	15
1.3.4.1 Écoulement à surface libre permanent .....	17
1.3.4.2 Écoulement uniforme .....	17
<b>RÉSUMÉ</b> .....	18
<b>EXERCICES</b> .....	19
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> .....	22
<b>SYMBOLES</b> .....	23
<b>CHAPITRE 2 Calcul des conduites sous pression</b> .....	25
2.1 Définitions .....	26
2.2 Théorème de Bernoulli .....	28
2.3 Équation de Bernoulli généralisée. ....	32
2.4 Calcul des pertes de charge par frottement .....	34
2.4.1 Définitions. ....	34
2.4.2 Formulation générale de la perte de charge. ....	35
2.4.3 Formule de Darcy-Weissbach. ....	36
2.4.4 Formule de Hazen-Williams. ....	42
2.4.5 Relation entre les deux formules de perte de charge. ....	44
2.5 Calcul des pertes de charge singulières .....	44
2.5.1 Généralités .....	44
2.5.2 Pertes de charge dans un élargissement brusque. ....	45
2.5.3 Pertes de charge dans un rétrécissement .....	46
2.5.4 Pertes de charge dans une dérivation latérale .....	47



2.5.5 Pertes de charge dans les vannes et les robinets . . . . .	48
2.5.6 Pertes de charge dans les coudes . . . . .	49
<b>2.6 Longueur équivalente . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>2.7 Calcul des conduites en série et en parallèle . . . . .</b>	<b>52</b>
2.7.1 Conduites en série. . . . .	52
2.7.2 Conduites en parallèle. . . . .	55
<b>2.8 Courbe caractéristique d'une conduite (C.C.C.) . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>2.9 Courbe caractéristique de conduites en série . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>2.10 Courbe caractéristique de conduites en parallèle . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>2.11 Problème des trois réservoirs. . . . .</b>	<b>60</b>
<b>RÉSUMÉ . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>SYMBOLES . . . . .</b>	<b>72</b>
 <b>CHAPITRE 3 Les pompes . . . . .</b>	 <b>73</b>
<b>3.1 Considérations économiques . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>3.2 Description d'une pompe centrifuge. . . . .</b>	<b>76</b>
<b>3.3 Nomenclature . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.4 Courbes caractéristiques d'une pompe. . . . .</b>	<b>79</b>
3.4.1 Courbe caractéristique $Q - H_p$ . . . . .	79
3.4.2 Courbe de rendement. . . . .	80
<b>3.5 Vitesse spécifique . . . . .</b>	<b>81</b>
3.5.1 Définition et considérations théoriques. . . . .	81
3.5.2 Applications pratiques de la vitesse spécifique . . . . .	85
<b>3.6 Règles de similitude pour les pompes centrifuges . . . . .</b>	<b>85</b>
3.6.1 Rognage d'une pomp . . . . .	85
3.6.2 Modification de la vitesse de rotation . . . . .	86
<b>3.7 Point de fonctionnement . . . . .</b>	<b>87</b>
3.7.1 Solution graphique . . . . .	88
3.7.2 Solution numérique. . . . .	90
<b>3.8 Ajustement du point de fonctionnement . . . . .</b>	<b>90</b>
3.8.1 Problématique. . . . .	90
3.8.2 Modification de la vitesse de rotation du moteur de la pompe . . . . .	91
3.8.3 Modification du diamètre du rotor de la pompe. . . . .	92
3.8.4 Réduction du débit par vannage. . . . .	92
<b>3.9 Problème de cavitation dans les pompes . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>3.10 Critères d'acceptation du point de fonctionnement . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>3.11 Pompes en série et pompes en parallèle . . . . .</b>	<b>102</b>
3.11.1 Pompes en série . . . . .	102
3.11.2 Pompes en parallèle . . . . .	104
<b>3.12 Amorçage des pompes centrifuges . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>3.13 Profondeur d'immersion des prises d'eau. . . . .</b>	<b>106</b>

<b>3.14 Choix des pompes</b> .....	107
<b>RÉSUMÉ</b> .....	109
<b>EXERCICES</b> .....	111
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> .....	115
<b>SYMBOLES</b> .....	116
 <b>CHAPITRE 4 Coup de bélier</b> .....	117
4.1 Introduction .....	118
4.2 Compressibilité des liquides .....	118
4.3 Élasticité des conduites .....	119
4.4 Phénomène du coup de bélier .....	121
4.5 Vitesse de propagation des ondes .....	125
4.6 Manœuvre instantanée .....	128
4.7 Manœuvre progressive .....	129
4.8 Le coup de bélier dans les pompes .....	131
4.8.1 Généralités .....	131
4.8.2 Arrêt instantané .....	132
4.8.3 Arrêt non instantané .....	133
4.9 Coup de bélier dans les clapets .....	134
4.10 Transmission du coup de bélier .....	135
4.11 Moyens de diminuer les effets du coup de bélier .....	139
4.11.1 Volant couplé au moteur .....	139
4.11.2 Réservoir d'air .....	140
4.11.3 Cheminée d'équilibre .....	141
4.11.4 Soupapes de sécurité .....	142
<b>RÉSUMÉ</b> .....	143
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> .....	144
<b>SYMBOLES</b> .....	145
 <b>CHAPITRE 5 Écoulements à surface libre</b> .....	147
5.1 Introduction .....	148
5.2 Classification des écoulements .....	149
5.3 Caractéristiques géométriques des écoulements à surface libre .....	150
5.3.1 Section mouillée d'un canal .....	150
5.3.2 Périmètre mouillé d'un canal .....	151
5.3.3 Rayon hydraulique .....	151
5.3.4 Profondeur ou tirant d'eau .....	152
5.3.5 Largeur au plan d'eau .....	152
5.3.6 Largeur au radier .....	152
5.3.7 Pente d'un canal .....	153
5.3.8 Canal prismatique .....	153
5.4 Vitesses et pressions dans une section d'écoulement .....	154
5.4.1 Répartition des vitesses .....	154



5.4.2 Répartition des pressions .....	157
<b>5.5 Équation d'énergie pour les écoulements à surface libre .....</b>	<b>159</b>
5.5.1 Formulation générale .....	159
5.5.2 Écoulement uniforme .....	159
5.5.3 Divers types de problèmes posés en pratique .....	161
5.5.3.1 <i>Calcul de la profondeur normale</i> .....	161
5.5.3.2 <i>Calcul du débit et de la vitesse d'écoulement</i> .....	166
5.5.3.3 <i>Calcul des dimensions d'un canal</i> .....	168
5.5.3.4 <i>Calcul du coefficient de Manning</i> .....	169
5.5.3.5 <i>Calcul de la pente ou de la perte de charge</i> .....	170
5.5.4 Cas particulier de la forme circulaire .....	172
5.5.5 Règles pratiques de dimensionnement des canaux .....	174
5.5.6 Forme optimale de la section d'un canal .....	175
<b>5.6 Notion d'énergie spécifique .....</b>	<b>177</b>
5.6.1 Définition .....	177
5.6.2 Divers régimes d'écoulement .....	178
5.6.3 Cas particulier de la section rectangulaire .....	181
5.6.4 Écoulement critique: cas général .....	182
5.6.5 Interprétation de l'écoulement critique .....	185
5.6.6 Notion de pente critique .....	189
<b>5.7 Écoulement variant graduellement .....</b>	<b>191</b>
5.7.1 Définition .....	191
5.7.2 Problématique .....	192
5.7.3 Calcul de la courbe de remous .....	192
5.7.3.1 <i>Équation de la courbe de remous</i> .....	192
5.7.3.2 <i>Forme générale de la courbe de remous</i> .....	194
5.7.3.3 <i>Solution de l'équation différentielle du mouvement</i> .....	198
<b>5.8 Écoulement variant brusquement .....</b>	<b>201</b>
5.8.1 Définition du ressaut hydraulique .....	201
5.8.2 Profondeurs conjuguées .....	203
5.8.3 Perte d'énergie dans le ressaut hydraulique .....	204
5.8.4 Bassin d'amortissement .....	206
<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>209</b>
<b>EXERCICES .....</b>	<b>210</b>
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE .....</b>	<b>215</b>
<b>SYMBOLES .....</b>	<b>216</b>
 <b>CHAPITRE 6 Écoulements à travers les déversoirs</b> <b>et les orifices .....</b>	 <b>217</b>
6.1 Définitions et généralités .....	218
6.2 Écoulements à travers un orifice .....	219
6.3 Déversoir à paroi mince et rectangulaire .....	222

<b>6.4 Déversoir triangulaire</b> . . . . .	224
<b>6.5 Écoulement à travers un déversoir à seuil épais</b> . . . . .	226
<b>6.6 Canaux jaugeurs Parshall</b> . . . . .	228
<b>6.7 Déversoir latéral</b> . . . . .	230
6.7.1 Différents types d'écoulement . . . . .	230
6.7.2 Formule de Marchi . . . . .	231
6.7.3 Formule de Dominguez . . . . .	232
<b>6.8 Analyse des incertitudes de mesure</b> . . . . .	235
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	236
<b>EXERCICES</b> . . . . .	237
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> . . . . .	238
<b>SYMBOLES</b> . . . . .	239

## **CHAPITRE 7 Cycle hydrologique – précipitations, évaporation, et infiltrations** . . . . .

<b>7.1 Introduction générale</b> . . . . .	242
<b>7.2 Le cycle hydrologique</b> . . . . .	243
<b>7.3 Hydrologie des bassins versants</b> . . . . .	245
7.3.1 Définition d'un bassin versant . . . . .	245
7.3.2 Précipitations sur un bassin versant . . . . .	248
7.3.2.1 <i>Classification</i> . . . . .	248
7.3.2.2 <i>Mesure des précipitations</i> . . . . .	248
7.3.2.3 <i>Évaluation des précipitations sur un bassin versant</i> . . . . .	251
7.3.3 Notion d'infiltration . . . . .	254
7.3.3.1 <i>Les pertes par dépression</i> . . . . .	254
7.3.3.2 <i>Méthode de l'indice d'infiltration</i> . . . . .	255
7.3.3.3 <i>Méthode de Horton</i> . . . . .	257
7.3.4 Notion d'évaporation . . . . .	260
7.3.4.1 <i>Définition</i> . . . . .	260
7.3.4.2 <i>Description et quantification du phénomène</i> . . . . .	260
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	264
<b>EXERCICES</b> . . . . .	265
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> . . . . .	266
<b>SYMBOLES</b> . . . . .	267

## **CHAPITRE 8 Modèles de transformation pluie-fonte-débit** . . . . .

<b>8.1 Introduction</b> . . . . .	270
<b>8.2 Hydrogramme de ruissellement</b> . . . . .	270
8.2.1 Généralités . . . . .	270
8.2.2 Définitions . . . . .	270
<b>8.3 Séparation des différentes composantes de l'écoulement</b> . . . . .	272
<b>8.4 Courbe de tarage</b> . . . . .	274
8.4.1 Principe . . . . .	274



8.4.2 Détermination des paramètres . . . . .	274
<b>8.5 Transformations pluie-débit . . . . .</b>	<b>275</b>
8.5.1 Méthode rationnelle . . . . .	275
8.5.1.1 Formulation de la méthode . . . . .	276
8.5.1.2 Courbes intensité-durée-fréquence (IDF). . . . .	276
8.5.1.3 Choix de la durée de la pluie . . . . .	277
8.5.1.4 Estimation du temps de concentration . . . . .	279
8.5.1.5 Coefficient de ruissellement $C$ . . . . .	281
8.5.1.6 Limites de la méthode rationnelle . . . . .	282
8.5.2 Méthode de l'hydrogramme unitaire . . . . .	282
8.5.2.1 Définition. . . . .	282
8.5.2.2 Principe de la méthode . . . . .	283
8.5.2.3 Calcul de l'hydrogramme unitaire à partir des précipitations et du débit . . . . .	284
8.5.2.4 Utilisation de l'hydrogramme unitaire . . . . .	286
8.5.3 Hydrogramme unitaire synthétique . . . . .	288
8.5.4 Méthode du réservoir non linéaire. . . . .	291
<b>8.6 Modèle de fonte des neiges . . . . .</b>	<b>292</b>
8.6.1 Introduction . . . . .	292
8.6.2 Modèle des degrés-jours. . . . .	293
8.6.3 Modèle de transformation pluie-fonte-débit. . . . .	294
8.6.3.1 Introduction . . . . .	294
8.6.3.2 Équation de prédiction. . . . .	295
8.6.3.3 Détermination du facteur de fonte . . . . .	296
8.6.3.4 Détermination des coefficients d'écoulement $C_{sn}$ et $C_m$ . . . . .	296
8.6.3.5 Détermination de l'équation de récession. . . . .	296
8.6.3.6 Détermination de la température critique . . . . .	297
8.6.3.7 Extrapolation spatiale de la température . . . . .	298
8.6.3.8 Détermination des entrées du modèle . . . . .	298
8.6.3.9 Détermination de la fraction du bassin versant couverte par la neige . . . . .	299
8.6.4 Critère de validité du modèle . . . . .	301
<b>RÉSUMÉ . . . . .</b>	<b>302</b>
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>303</b>
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE . . . . .</b>	<b>307</b>
<b>SYMBOLES . . . . .</b>	<b>309</b>
 <b>CHAPITRE 9 Laminage des crues . . . . .</b>	 <b>311</b>
9.1 Introduction . . . . .	312
9.2 Définition . . . . .	312
9.3 Laminage d'une onde de crue dans un tronçon de rivière . . . . .	313
9.3.1 Équations du mouvement . . . . .	313
9.3.2 Méthode de Muskingum. . . . .	314
9.3.3 Méthode de Muskingum-Cunge. . . . .	319



<b>9.4 Laminage artificiel à travers un réservoir</b> .....	319
9.4.1 Contexte .....	319
9.4.2 Principe de la méthode de solution .....	321
9.4.3 Calcul du débit de sortie .....	322
9.4.4 Calcul du volume stocké .....	324
<b>RÉSUMÉ</b> .....	328
<b>EXERCICES</b> .....	329
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> .....	331
<b>SYMBOLES</b> .....	332
 <b>CHAPITRE 10 Hydrologie statistique</b> .....	333
<b>10.1 Introduction</b> .....	334
<b>10.2 Période de retour, risque hydrologique</b> et règles générales de design .....	335
10.2.1 Définitions .....	335
10.2.2 Gestion du risque hydrologique .....	335
<b>10.3 Détermination des probabilités de dépassement</b> .....	337
<b>10.4 Détermination analytique des probabilités de dépassement</b> .....	341
10.4.1 Paramètres d'un échantillon et d'une population .....	341
10.4.2 Modèle général pour l'estimation des quantiles .....	343
<b>10.5 Loi normale</b> .....	344
10.5.1 Propriétés de la loi normale .....	344
10.5.2 Loi normale centrée réduite .....	344
10.5.3 Procédure d'utilisation de la loi normale .....	345
<b>10.6 Intervalle de confiance dans l'estimation des quantiles</b> .....	347
<b>10.7 Présentation graphique des quantiles</b> .....	349
<b>10.8 La loi Log-normale</b> .....	350
<b>10.9 Distribution de Gumbel ou extrême de type I</b> .....	353
10.9.1 Procédure d'utilisation de la loi de Gumbel .....	354
<b>10.10 Distribution Log-Pearson de type III (LP3)</b> .....	357
<b>10.11 Autres fonctions de distribution</b> .....	359
10.11.1 Introduction .....	359
10.11.2 Distribution binomiale .....	360
10.11.3 Distribution géométrique .....	362
<b>RÉSUMÉ</b> .....	363
<b>EXERCICES</b> .....	364
<b>OUVRAGES DE RÉFÉRENCE</b> .....	369
<b>SYMBOLES</b> .....	370
 <b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b> .....	371



## *Avant-propos*

L'hydraulique et l'hydrologie sont deux disciplines distinctes mais intimement liées. À titre d'exemple, la conception d'une conduite de drainage fait appel d'une part à des notions d'hydrologie pour estimer le débit à transporter et d'autre part à des notions d'hydraulique pour calculer le diamètre économique. Ainsi, un des objectifs du présent ouvrage est de regrouper ensemble les notions d'hydraulique et d'hydrologie qu'on retrouve traitées séparément dans les ouvrages traditionnels.

Comme l'hydraulique et l'hydrologie sont des disciplines très vastes, il fallait relever le défi de présenter l'essentiel de la matière en gardant à l'ouvrage une dimension modeste. Cet ouvrage ne peut pas, par conséquent, avoir la prétention de couvrir tous les aspects et toutes les approches de la matière traitée. Par ailleurs, le souci de présenter un ouvrage pratique et appliqué nous a amené à illustrer les notions introduites par des exemples et des applications.

L'auteur ne saurait être tenu responsable de dommages de quelque sorte résultant de l'utilisation ou de l'application du contenu du présent ouvrage.

Saad Bennis, décembre 2004.







# Chapitre 1

## *Équations de conservation de la masse*

### Objectifs

- 1- Connaître les différentes formes différentielles et intégrales de l'équation de continuité.
- 2- Savoir faire un bilan de masse au niveau d'un volume de contrôle fixe et déformable.
- 3- Connaître les formes usuelles de l'équation de continuité pour une conduite de diamètre constant et variable.
- 4- Savoir formuler l'équation de continuité pour un écoulement à surface libre et dégager les différents cas particuliers.
- 5- Appliquer l'équation de continuité aux écoulements souterrains et dériver l'équation de Laplace.
- 6- Savoir traiter les différents problèmes relatifs à la vidange et au remplissage des réservoirs.

Pour résoudre la plupart des problèmes qui se posent en ingénierie, on utilise un principe universel et unique de conservation. L'équation qui traduit ce principe de conservation peut prendre des formes différentes selon les contextes. La mécanique des fluides qui constitue la fondation de l'hydraulique utilise les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de son moment ainsi que de l'énergie.

Les chapitres 1 et 2 traitent respectivement des principes de conservation de la masse et de l'énergie qui sont les plus utilisés en hydraulique. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est introduite, selon le besoin, dans les chapitres subséquents.

## 1.1 Définitions

La masse  $m$  contenue dans un volume  $S$  se calcule par la relation

$$m = \int_S \rho \, dS \quad (1.1)$$

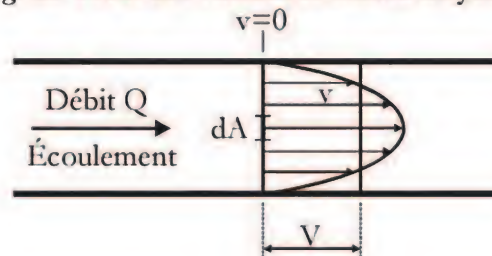
où  $\rho$  est la masse volumique qui s'exprime en  $\text{kg}/\text{m}^3$ , la masse étant en  $\text{kg}$  et le volume en  $\text{m}^3$ . Lorsque le corps est homogène, cette relation devient

$$m = \rho S \quad (1.2)$$

Le débit volumique qui traverse une section d'écoulement  $A$  se calcule par la relation (figure 1.1)

$$Q = \int_A v \, dA = VA \quad (1.3)$$

Fig. 1.1 Profil des vitesses et vitesse moyenne



où

$v$  est la vitesse d'écoulement qui varie selon la position; elle est nulle au point qui est en contact avec une paroi fixe, et maximale au point le plus éloigné des parois,



$V$  est la vitesse moyenne d'écoulement (m/s),  
 $A$  est la section d'écoulement ( $m^2$ ), normale au courant.

En système international, le débit doit être exprimé en  $m^3/s$ , mais pour des raisons pratiques, on peut aussi l'exprimer en litres par seconde (l/s), litres par minute (l/min), etc., selon son ordre de grandeur.

Le débit massique qui traverse une section d'écoulement  $A$ , se calcule par la relation

$$\dot{m} = \int_A \rho v \, dA \quad (1.4)$$

Lorsque le fluide est homogène et incompressible, cette relation devient  $\dot{m} = \rho Q$  où  $Q$  est le débit volumique. En système international, le débit massique est exprimé en kg/s.

### ***Application 1.1***

L'eau de masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  à  $4^\circ\text{C}$  s'écoule avec une vitesse moyenne  $V = 1,0 \text{ m/s}$  dans une conduite de diamètre  $D = 0,6 \text{ m}$ .

Il faut calculer les débits volumique et massique.

*Réponses :*

Le débit volumique  $Q$  se calcule par la relation (1.3) :

$$Q = AV = V(\pi D^2/4) = [\pi(0,6\text{m})^2/4] \cdot 1,0\text{m/s} = 0,2826\text{m}^3/\text{s}$$

Le débit massique  $\dot{m}$  se calcule par la relation (1.4) :

$$\dot{m} = \rho Q = 1000\text{kg/m}^3 \cdot 0,2826\text{m}^3/\text{s} = 282,6\text{kg/s}$$

## 1.2 L'équation de continuité : Forme intégrale

### 1.2.1 Formulation générale

L'équation de continuité traduit le principe selon lequel la matière ne peut ni disparaître ni être créée. Cette équation exprime en termes comptables que dans un temps  $dt$ , la quantité de matière qui entre dans un volume de contrôle est égale à celle qui en sort plus celle qui s'y accumule (figure 1.2) :

$$\dot{m}_E = \dot{m}_S + \frac{\partial m}{\partial t} \quad (1.5)$$

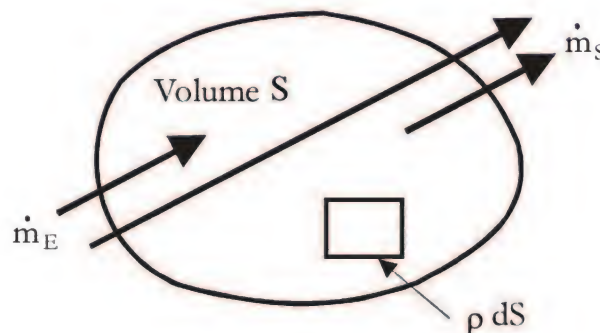


Fig. 1.2 Schématisation d'un volume de contrôle

### 1.2.2 L'équation de continuité pour un fluide incompressible

En hydraulique, on traite principalement du transport et du stockage de l'eau. Pour l'eau, les variations de pression et de température en jeu ne font pratiquement pas modifier la masse volumique qui peut être considérée comme constante (fluide incompressible). Dans ce contexte, l'équation (1.5) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S \quad (1.6)$$

où  $Q_E$  et  $Q_S$  sont les débits volumiques entrant et sortant.

L'équation de continuité exprime donc que pour un fluide incompressible, le taux de variation du volume est égal à la différence entre les débits volumiques entrant  $Q_E$  et sortant  $Q_S$ .

### Application 1.2

Une rivière apporte un débit  $Q_E = 100\text{m}^3/\text{s}$  à un barrage hydroélectrique. Le débit turbiné est  $Q_S = 200\text{m}^3/\text{s}$ . 1) Quel est le taux de variation de stockage dans le réservoir dans ces conditions? 2) Si le stockage au jour  $j$  est  $S_j = 100\text{hm}^3$ , quel est le stockage  $S_{j+1}$  au jour  $j+1$  ?

Réponses :

$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S = 100\text{m}^3/\text{s} - 200\text{m}^3/\text{s} = -100\text{m}^3/\text{s}$ . Le réservoir se vide à un taux de  $100\text{m}^3/\text{s}$ .

$$S_{j+1} = S_j - [100\text{m}^3/\text{s} \cdot (24\text{h}/j \cdot 3600\text{s}/\text{h})] / (10^6\text{m}^3/\text{hm}^3) = 91,36\text{hm}^3.$$

## 1.2.3 Cas particuliers courants pour les conduites sous pression

### 1.2.3.1 Conduite pleine avec diamètre constant

Quand la conduite est pleine, le volume d'eau  $S$  contenu dans le tronçon de conduite de diamètre  $D$  ne varie pas dans le temps (figure 1.3), si bien que

$\frac{\partial}{\partial t}(S) = 0$  et l'équation (1.6) s'écrit :

$$0 = Q_E - Q_S \quad (1.7)$$

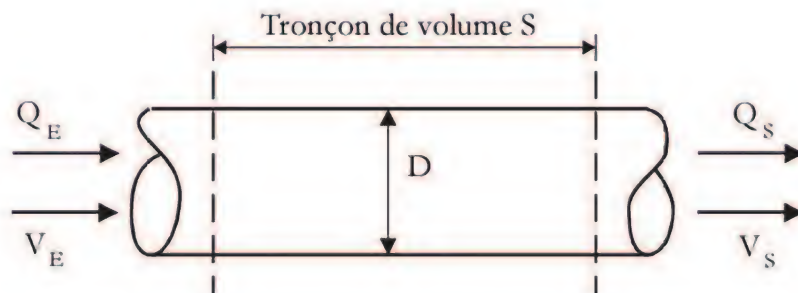


Fig. 1.3 Conduite pleine avec diamètre constant



En écrivant que  $Q_E = A_E V_E$  et  $Q_S = A_S V_S$ , compte tenu du fait que  $A_E = A_S$ , l'équation (1.7) devient :

$$V_E = V_S \quad (1.8)$$

L'équation 1.8 paraît à première vue triviale mais plusieurs situations qui peuvent se présenter pourront prêter à confusion. Considérons par exemple le cas où une pompe puise l'eau d'un lac pour la refouler dans une conduite qui passe par-dessus une colline (fig. 1.4). La vitesse au point 2 situé à la sortie, est-elle différente de la vitesse au point 1 au sommet de la colline (on suppose que la conduite est pleine) ?

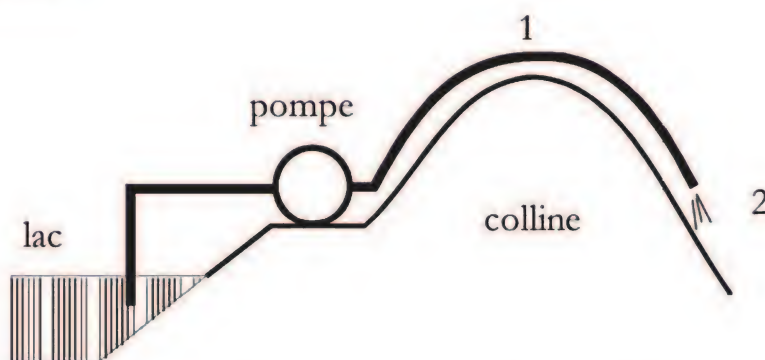


Fig. 1.4 Exemple de conduite à diamètre constant

### 1.2.3.2 Conduite pleine avec changement de diamètre

Pour la conduite à diamètre variable coulant pleine schématisée à la figure 1.5, le volume d'eau  $S$  contenu dans le tronçon ne varie pas dans le temps,  $\partial S / \partial t = 0$ , si bien que l'équation 1.6 s'écrit encore :

$$0 = Q_E - Q_S = A_E V_E - A_S V_S \quad (1.9)$$

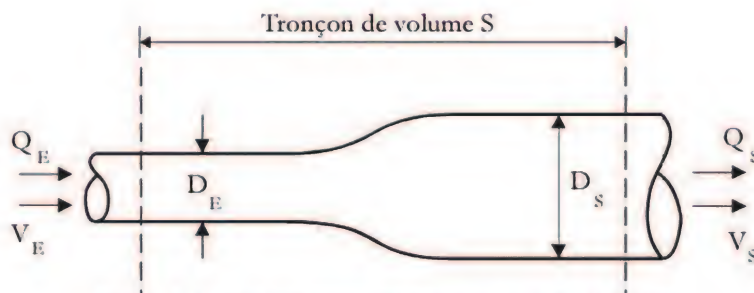


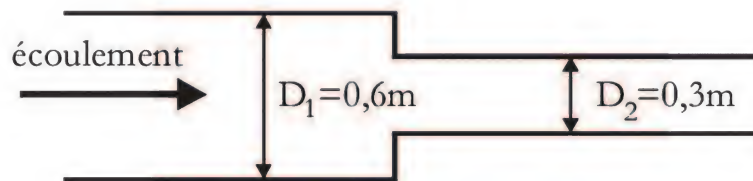
Fig. 1.5 Conduite avec changement de diamètre

Mais cette fois-ci  $A_E$  diffère de  $A_S$ . Pour les conduites circulaires qui sont les plus courantes, l'équation 1.9 prend la forme utile suivante :

$$\frac{V_S}{V_E} = \left( \frac{D_E}{D_S} \right)^2 \quad (1.10)$$

### ***Application 1.3***

Dans un système de distribution d'eau potable (fig. 1.6), la vitesse maximale ne doit pas excéder 3,0m/s. Si cette condition est respectée dans la première conduite de diamètre  $D_1 = 0,6\text{m}$ , le sera-t-elle dans la seconde conduite de diamètre  $D_2 = 0,3\text{m}$ ?



**Fig. 1.6 Rétrécissement de diamètre**

$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \frac{1}{4}$  donc  $V_2 = 4V_1$ . Si la vitesse  $V_1 = 3,0\text{m/s}$ , la vitesse  $V_2 = 12\text{m/s}$ . Cette valeur est supérieure à la limite permise.

### 1.2.3.3 Application de l'équation de continuité aux réservoirs

La figure 1.7 présente le schéma d'un réservoir dont la section  $A$  peut être constante ou variable avec la hauteur  $h$ .

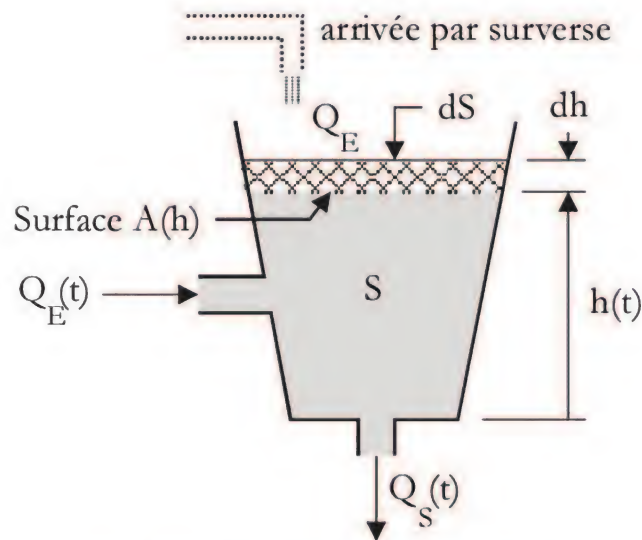


Fig. 1.7 Écoulements dans un réservoir.

Le débit d'entrée  $Q_E(t)$  peut provenir aussi bien d'une station de pompage que d'une source surélevée par rapport au niveau d'eau dans le réservoir. Dans les deux cas, le débit d'entrée  $Q_E(t)$  varie quand la profondeur  $h(t)$  varie. On peut éliminer cette variation en arrangeant une arrivée au réservoir par surverse, tel que montré sur la figure 1.7. Le débit de sortie  $Q_S(t)$  varie en fonction de la profondeur  $h(t)$ . Le volume stocké dans le réservoir  $S(t)$  dépend lui aussi directement de la hauteur  $h(t)$ .

Comme  $dS = A(h)dh$ , l'équation de continuité s'écrit :  $A(h) \frac{dh}{dt} = Q_E(t) - Q_S(t)$ .

Cette équation peut être intégrée pour résoudre tout problème relié à une des variables qui y apparaît.



### Application 1.4

Une conduite circulaire, de diamètre  $D_2 = 0,6\text{m}$ , draine l'eau d'un réservoir de forme circulaire, de diamètre  $D_1 = 6,0\text{m}$  (fig. 1.8).

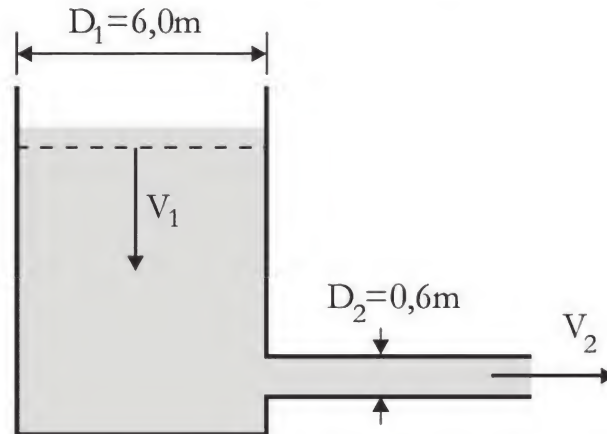


Fig. 1.8 Écoulement d'un réservoir vers une conduite

Comparer la vitesse  $V_2$  de l'eau dans la conduite avec la vitesse  $V_1$  de descente de l'eau dans le réservoir.

Réponse :

L'équation (1.10), appliquée entre la section d'entrée où la vitesse est  $V_1$  et une section quelconque de la conduite où la vitesse est  $V_2$ , donne :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 = 0,01$$

La vitesse de descente de l'eau dans le réservoir est cent fois plus faible que la vitesse de l'eau dans la conduite. C'est pour cette raison que la vitesse d'écoulement sera considérée, à toute fin pratique, nulle dans les grands réservoirs. Cette hypothèse se trouve encore appuyée par le fait que la vitesse intervient par son carré dans l'équation d'énergie. Ainsi, la dernière relation trouvée s'écrit :

$$\frac{V_1^2}{2g} = 0,0001 \frac{V_2^2}{2g}$$

Comme la vitesse  $V_2$  dans la conduite doit idéalement être de l'ordre de  $1\text{m/s}$  et ne doit pas excéder  $3\text{m/s}$  pour limiter les surpressions lors d'un changement brusque du débit, le terme d'énergie cinétique  $V_1^2/2g$  est de l'ordre de  $0,005\text{mm}$ .

### Application 1.5

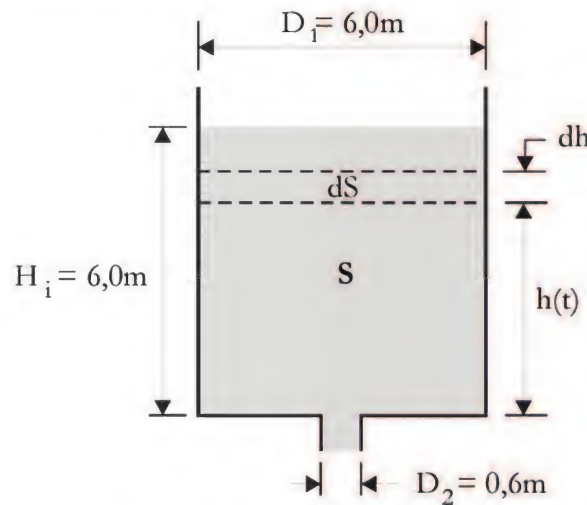


Fig. 1.9 Vidange de réservoir

On considère un réservoir circulaire de diamètre  $D_1 = 6,0\text{m}$  muni à son fond d'un orifice de vidange circulaire de diamètre  $D_2 = 0,6\text{m}$  (fig. 1.9). Initialement, ce réservoir est rempli jusqu'à une hauteur initiale  $H_i = 6,0\text{m}$ . Quel est le temps de vidange nécessaire pour réduire la hauteur de moitié et l'amener à une hauteur finale  $H_f = 3,0\text{m}$ ?

L'équation de continuité s'écrit :  $\frac{dS}{dt} = Q_E - Q_S$ . Dans cette équation :

$$dS = A_1 dh = \frac{\pi D_1^2}{4} dh, \quad Q_E = 0, \quad Q_S = V_2 A_2 = \pi \frac{D_2^2}{4} \sqrt{2gh}.$$

Compte tenu de ces relations, l'équation de continuité devient :

$$D_1^2 \frac{dh}{dt} = -D_2^2 \sqrt{2gh}. \text{ Pour intégrer cette équation on procède par}$$

séparation des variables :  $\int_{H_i}^{H_f} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \sqrt{2g} \int_0^{t_{\text{vidange}}} dt$ . Donc,

$$t_{\text{vidange}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H_i} - \sqrt{H_f})$$

$$\text{Numériquement : } t_{\text{vidange}} = \left(\frac{6}{0,6}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9,81}} (\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 32,4\text{s}.$$

Normalement le temps de vidange est plus long car la section d'écoulement à la sortie de l'orifice est contractée et elle est plus faible que  $A_2$ . Compte tenu des pertes de charge, la vitesse d'écoulement est plus faible que  $V_2$ . Cet aspect est traité dans le chapitre 6.

### 1.3 Autres formes courantes de l'équation de continuité

L'équation de continuité peut prendre des formes différentes selon le type de situation d'écoulement auquel elle est appliquée. Avant d'examiner ces formes, il est utile de définir certains concepts.

#### 1.3.1 Définitions

Écoulements permanent et non permanent

Un écoulement est dit permanent si aucune variable pertinente de l'écoulement ne dépend du temps. Autrement, il est non permanent.

Dimensionnalité de l'écoulement

La dimensionnalité d'un écoulement est le nombre de coordonnées spatiales indépendantes nécessaires pour décrire les variables de l'écoulement. Ainsi, l'écoulement peut être unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel selon que la vitesse dépend de  $(x)$ , de  $(x \text{ et } y)$  ou de  $(x, y \text{ et } z)$ .

Directionnalité de l'écoulement

La directionnalité est le nombre de composantes requises pour exprimer le vecteur vitesse dans le système d'axes choisi.

Ainsi, l'écoulement peut être unidirectionnel, bidirectionnel ou tridirectionnel selon que le vecteur vitesse possède une seule composante ( $v_x$ ), deux composantes ( $v_x$  et  $v_y$ ) ou trois composantes ( $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ ).

#### 1.3.2 Volume de contrôle infinitésimal fixe

Considérons un volume de contrôle  $dS = dx \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  et un écoulement unidirectionnel en  $\vec{x}$ , tel que montré sur la figure 1.10.

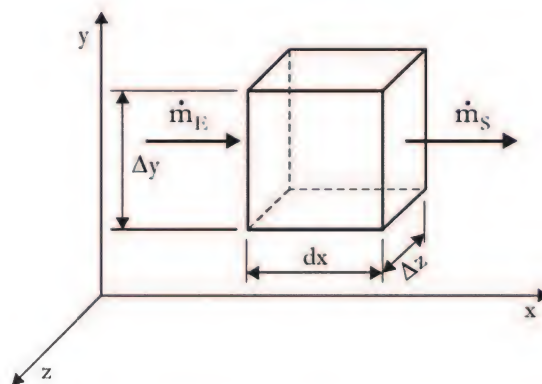


Fig. 1.10 Volume infinitésimal fixe



L'équation de continuité (1.5) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dS = \dot{m}_E - \dot{m}_S \quad (1.11)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dS = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta y \Delta z dx \quad (1.12)$$

Comme il y a une seule composante de la vitesse  $V_x$ , le débit massique dans la section d'entrée est :

$$\dot{m}_E = \rho V_x \Delta y \Delta z \quad (1.13)$$

Le débit massique dans la section de sortie, située à une distance  $dx$  par rapport à l'entrée, s'écrit :

$$\dot{m}_S = \rho V_x \Delta y \Delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x \Delta y \Delta z) dx \quad (1.14)$$

En utilisant (1.12), (1.13) et (1.14) dans (1.11) on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0 \quad (1.15)$$

Cette équation représente la forme différentielle de l'équation de continuité pour un écoulement unidirectionnel.

Pour un écoulement unidirectionnel incompressible, la relation (1.15) devient :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{soit } V_x = f(y, z, t)$$

Cette relation est similaire à celle obtenue pour un volume de contrôle macroscopique traité au paragraphe 1.2.3.1.

On peut généraliser facilement l'équation (1.15), par un procédé similaire, pour un écoulement tridirectionnel sous la forme (Sabersky, 1999) :



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0 \quad (1.16)$$

où  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  sont respectivement les composantes de la vitesse dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Quand l'écoulement est incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante, si bien que l'équation (1.16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0 \quad (1.17)$$

Si, de plus, le fluide est homogène, l'équation (1.17) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(V_z) = 0 \quad (1.18)$$

Cette forme de l'équation de continuité est fréquemment utilisée en hydraulique d'une manière générale et en hydraulique souterraine en particulier (Smith and Wheatcraft, 1993).

### ***Application 1.6***

Considérons un écoulement incompressible bidimensionnel et bidirectionnel décrit par le champ de vitesse  $V_x(x, y)$  et  $V_y(x, y)$ .

On connaît  $V_x(x, y) = xy$ .

Il faut déterminer  $V_y(x, y)$  en supposant  $V_y(x, 0) = 0$ .

Solution :

L'équation de continuité pour un écoulement incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \text{soit : } y + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Par intégration :  $V_y(x, y) = -\frac{y^2}{2} + f(x)$

Puisque  $V_y(x, 0) = f(x) = 0$  pour tout  $x$ , donc  $f(x) = 0$ .

Si bien que  $V_y(x, y) = -y^2/2$ .

### 1.3.3 Application aux écoulements souterrains

L'équation (1.18) est impuissante à elle seule à définir le champ d'écoulement  $V_x(x, y, z, t)$ ,  $V_y(x, y, z, t)$ ,  $V_z(x, y, z, t)$ . Il existe cependant une catégorie d'écoulements où cette équation conduit à la détermination complète du champ d'écoulement. C'est le cas des écoulements pour lesquels on peut admettre que le vecteur-vitesse dérive d'une fonction potentielle  $\phi(x, y, z, t)$ . L'exemple typique est celui d'un écoulement souterrain dans un milieu isotrope où la loi de Darcy peut s'écrire à un point :

$$V_x = -K \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = -K \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad V_z = -K \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.19)$$

avec  $\phi = -Kh + C$

où  $h = Z + p/\rho g$  = charge hydraulique totale au point considéré,  
 $Z$  est la position verticale du point considéré,  
 $p$  est la pression statique au point considéré,  
 $C$  est une constante d'intégration,  
 $K$  est la conductivité hydraulique.

Le milieu est dit isotrope quand la conductivité hydraulique  $K$  est identique dans toutes les directions d'écoulement. Autrement, le milieu est dit anisotrope. Dans ce cas, la conductivité hydraulique  $K$  varie avec la direction, ayant trois valeurs principales ( $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ ) qui, généralement, sont différentes des valeurs le long des coordonnées géométriques ( $K_x$ ,  $K_y$  et  $K_z$ ).

En remplaçant  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  dans (1.18), on obtient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.20)$$

Cette équation peut être résolue graphiquement ou par une méthode de différences finies (Fetter, 2001).

### 1.3.4 Application aux écoulements à surface libre

Considérons l'exemple d'une rivière en période de crue. À la suite de précipitations, le débit, la profondeur et la vitesse d'écoulement augmentent dans le temps (figure 1.11).

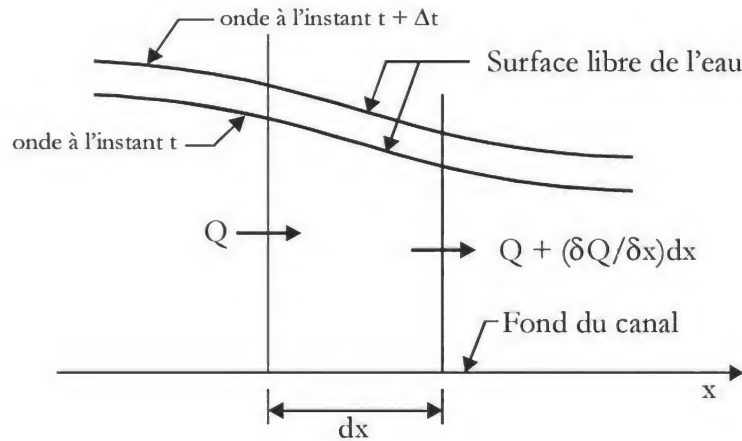


Fig. 1.11 Écoulement à surface libre

Comme l'écoulement est incompressible, l'équation (1.6) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S \quad (1.21)$$

Si l'écoulement peut être considéré unidirectionnel et unidimensionnel en  $x$ , on peut poser :

$$S = A(x, t) dx \quad (1.22)$$

$$Q_E = Q(x, t) \quad (1.23)$$

Dans ces conditions, le débit de sortie  $Q_S$  dans une section transversale située à une distance  $dx$  par rapport à la section d'entrée, se calcule par :

$$Q_S = Q + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \quad (1.24)$$

En remplaçant (1.22), (1.23) et (1.24) dans (1.21) on obtient :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.25)$$

Cette forme d'équation de continuité est utilisée en combinaison avec l'équation de la quantité de mouvement pour calculer les débits, les vitesses et les niveaux dans un écoulement à surface libre. Le système formé est appelé « équations de Barré de Saint-Venant ». Ce système doit être résolu par une méthode numérique de différences finies (Huber, 1998; Chow, 1988).

### Application 1.7

Un réservoir possède une vanne de fond rectangulaire la largeur  $L$  et de hauteur  $h$  (figure 1.12).

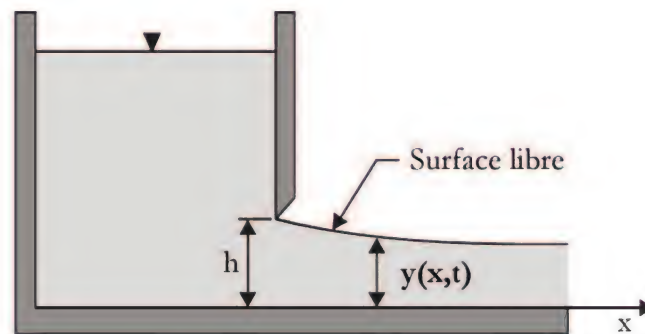


Fig. 1.12 Réservoir avec vanne de fond

En supposant l'écoulement unidirectionnel et quasi unidimensionnel, il faut développer l'équation de continuité pour un tel écoulement.

Solution :

En posant  $A(x, t) = Ly(x, t)$  dans l'équation (1.25), cette dernière s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{L} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$



### 1.3.4.1 Écoulement à surface libre permanent

Quand l'écoulement est permanent,  $\partial A / \partial t = 0$  et l'équation de continuité (1.25) s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.26)$$

En se référant à la figure 1.13, l'équation (1.26) s'écrit :

$$Q = \text{constante} = Q_1 = Q_2 \quad (1.27)$$

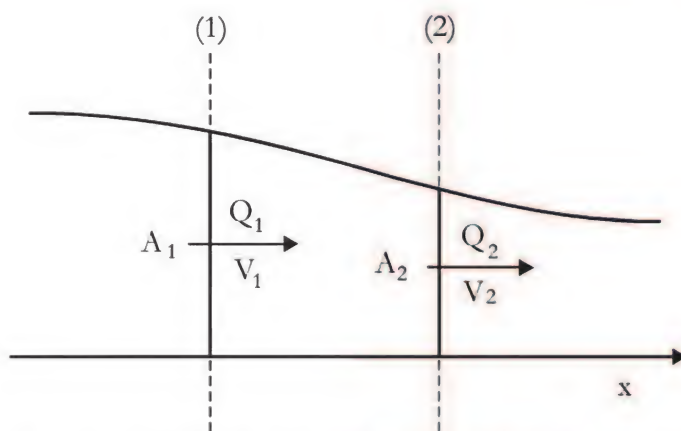


Fig. 1.13 Écoulement à surface libre permanent

ou encore :

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (1.28)$$

où

$A_1$  et  $A_2$  sont les sections transversales de l'écoulement dans les deux sections,  $V_1$  et  $V_2$  sont les vitesses moyennes d'écoulement dans les sections respectives.

### 1.3.4.2 Écoulement uniforme

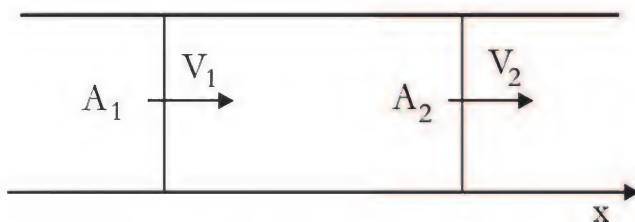


Fig. 1.14 Écoulement uniforme

Un écoulement à surface libre est dit uniforme si la profondeur ne varie pas dans la direction de l'écoulement (figure 1.14).

Dans ce cas,  $A_1 = A_2$ , si bien que l'équation (1.28) devient :  $V_1 = V_2$ .

## RÉSUMÉ

- Le débit d'écoulement se calcule par la relation  $Q = AV$
- L'équation de continuité prend la forme générale suivante pour un fluide incompressible tel que l'eau :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = Q_E - Q_S$$

- Dans une conduite de diamètre constant  $D$ , l'équation de continuité devient :  $V = \text{constante}$  dans toute la conduite.
- Lorsque le diamètre change dans la direction de l'écoulement pour passer de  $D_1$  à  $D_2$ , la vitesse change selon le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

- Pour un écoulement souterrain dans un milieu isotrope, l'équation de continuité prend la forme de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

- Pour un écoulement à surface libre, l'équation de continuité prend la forme générale suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

- Quand l'écoulement à surface libre est permanent, l'équation de continuité prend la forme :

$$A_1 V_1 = A_2 V_2.$$

- Si l'écoulement à surface libre est uniforme, l'équation de continuité prend la forme :

$$V_1 = V_2.$$

## EXERCICES

### Exercice 1.1

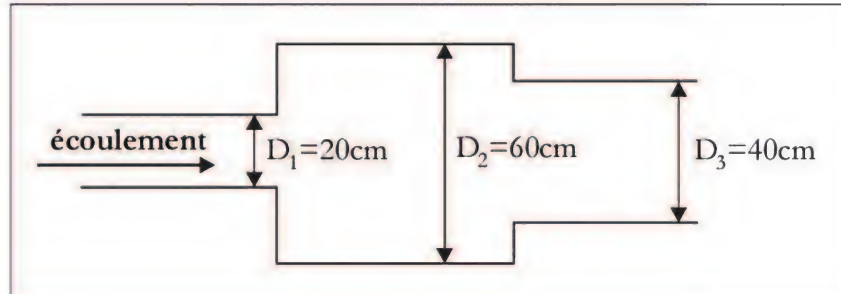


Fig. 1.15

On considère l'écoulement sous pression dans une conduite de section circulaire variable schématisée par la figure 1.15.

Si la vitesse d'écoulement dans le tronçon de diamètre  $D_2 = 60\text{cm}$  est  $1,0\text{m/s}$ , quelles sont les vitesses dans les tronçons de diamètre  $D_1 = 20\text{cm}$  et  $D_3 = 40\text{cm}$ ?

### Exercice 1.2

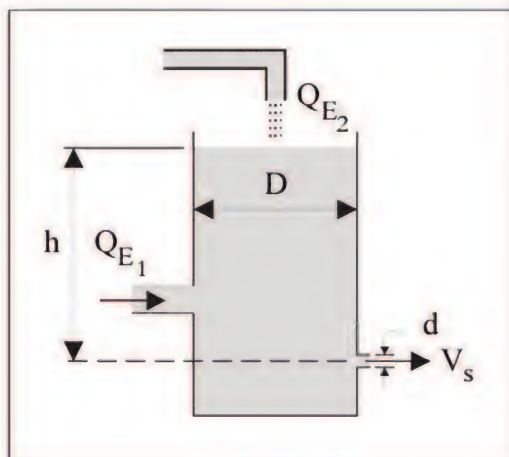


Fig. 1.16

On considère un réservoir cylindrique de diamètre  $D = 60\text{cm}$ .

Ce réservoir est alimenté par deux entrées  $Q_{E1} = 5\text{ l/s}$  et  $Q_{E2} = 6\text{ l/s}$ .

L'orifice circulaire de sortie possède un diamètre  $d = 5\text{cm}$ .

On néglige toutes les pertes de charge.

- Il faut écrire l'équation de conservation de la masse pour ce réservoir.
- En supposant que le réservoir est initialement vide, il faut déterminer la hauteur finale dans le réservoir.
- Il faut déterminer la vitesse du mouvement du plan d'eau quand  $h = 1,5\text{m}$ .
- En supposant les débits d'entrée nuls, quel est le temps nécessaire pour passer d'une hauteur  $h = 1,5\text{m}$  à une hauteur  $h = 0,5\text{m}$  en supposant les débits d'entrée nuls?

### Exercice 1.3

La figure 1.17 ci-jointe montre deux réservoirs  $R_1$  et  $R_2$ , chacun ayant un orifice circulaire de diamètres respectifs  $D_1$  et  $D_2$ .

Le réservoir  $R_2$  est alimenté par la sortie du réservoir  $R_1$ .

L'eau sort du réservoir  $R_2$  par l'orifice de sortie ainsi que sous forme de trop plein.



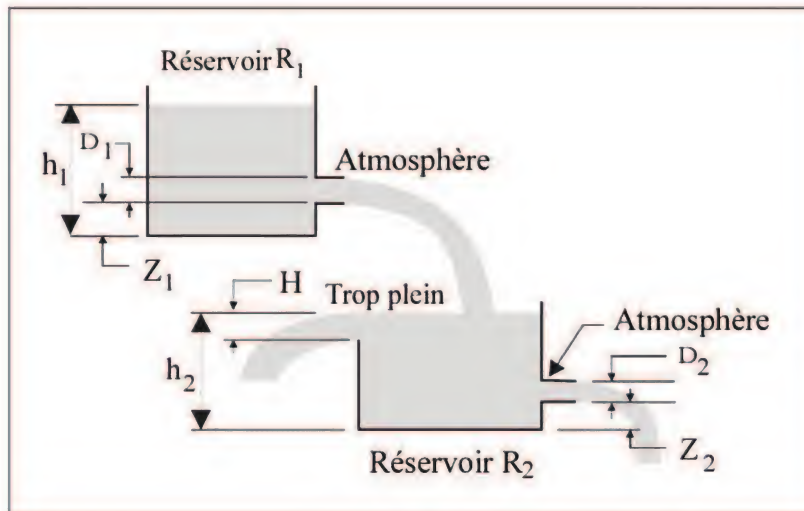


Fig. 1.17

Les données sont:

$$\begin{aligned} h_1 &= 5,0\text{m} \\ h_2 &= 4,0\text{m} \\ D_1 &= 30\text{cm} \\ D_2 &= 20\text{cm} \\ Z_1 &= 0,5\text{m} \\ Z_2 &= 0,5\text{m} \end{aligned}$$

Il faut déterminer le débit du trop plein (réservoir R<sub>2</sub>) en régime permanent..

On négligera les pertes de charge et la contraction de la section au niveau de l'orifice.

### Exercice 1.4

Un réservoir alimenté par une rivière possède les caractéristiques suivantes :

- parois latérales verticales
- niveau maximum d'exploitation = 205m
- niveau minimal d'exploitation = 160m
- superficie = 50km<sup>2</sup>
- débit d'entrée (débit de la rivière) = 1000m<sup>3</sup>/s
- débits de sortie :
  1. débit turbiné (production hydroélectrique) = 543m<sup>3</sup>/s,
  2. débit utilisé pour le flottage de bois = 20m<sup>3</sup>/s,
  3. débit de consommation = 1,0 m<sup>3</sup>/s,
  4. débit d'irrigation = 2,0m<sup>3</sup>/s.

1- Il faut déterminer la variation journalière du niveau de ce réservoir.

2- Il faut déterminer le temps nécessaire pour le remplissage de ce réservoir, sachant que son niveau initial était le niveau minimal d'exploitation.

### Exercice 1.5

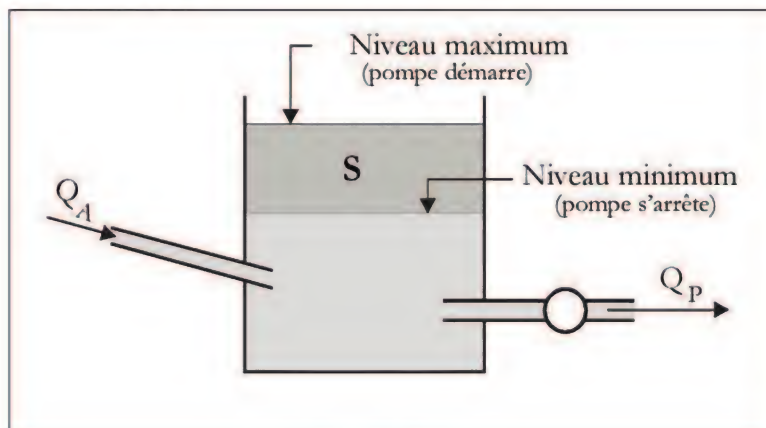


Fig. 1.18

Dans cet exercice, on se propose de calculer les dimensions d'un réservoir de service d'un immeuble de façon à limiter la fréquence maximale de démarrage du système de pompage à une valeur prédéterminée (figure 1.18).



Données :

durée entre deux démarrages  $T = 15$  minutes

débit pompé  $Q_p = 1$  litre par seconde.

On suppose que le réservoir était initialement (temps  $t = 0$ ) plein.

- a) Calculer le temps  $t_1$  de vidange du réservoir en fonction de  $S$ ,  $Q_p$  et  $Q_A$ .
- b) Au temps  $t_1$ , le niveau est minimum et la pompe s'arrête. Il faut maintenant calculer le temps  $t_2$  nécessaire pour remplir le volume  $S$  et atteindre le niveau maximum.
- c) Calculer la durée totale d'un cycle de démarrage en utilisant les relations obtenues en a) et b).
- d) Calculer la fréquence  $f$  de démarrage directement à partir de c).
- e) Trouver le débit  $Q_A$  qui correspond à la fréquence maximum. Pour ce faire, on dérive  $f$  par rapport à  $Q_A$  et on écrit que cette dérivée est nulle ( $f$  maximum), ceci permettant d'obtenir la valeur de  $Q_A$ .
- f) Remplacer la valeur de  $Q_A$  calculée en e) dans l'expression générale de  $f$  obtenue en d) et calculer la valeur de fréquence maximum.
- g) À partir de la relation obtenue en f), déterminer le volume  $S$  nécessaire en fonction de la fréquence maximum de démarrage.

## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 1

Chow, V.T. (1988), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Fetter, C.W. (2001), *Applied Hydrology*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice-Hall.

Huber, W.C. et Dickinson, R.E. (1988), *Storm Water Management Model Users' Manual*, Athens (GA), U.S. Environmental Protection Agency.

Sabersky, R.H., Acosta, A.J., Hauptmann, E.G. et Gates, E.M. (1999), *Fluid Flow*, 4<sup>e</sup> éd., Upper Saddle River (NJ), Prentice-Hall.

Smith, L. et Wheatcraft, S.W. (1993), «Groundwater Flow», dans D.R. Maidment (dir.), *Handbook of Hydrology*, New York, McGraw-Hill. McGraw-Hillinc.

**SYMBOLES DU CHAPITRE 1**

$A$	: section d'écoulement, surface
$C$	: constante
$D$	: diamètre
$f$	: fonction
$h, H$	: hauteur
$K$	: conductivité hydraulique
$L$	: largeur
$m$	: masse
$Q$	: débit
$S$	: volume
$t$	: temps
$v$	: vitesse d'écoulement
$V$	: vitesse moyenne d'écoulement
$x$	: abscisse, dimension, direction
$y$	: abscisse, dimension, direction
$z$	: abscisse, dimension, direction
$\partial$	: dérivée partielle
$D$	: variation
$\phi$	: fonction potentielle
$\rho$	: masse volumique





# Chapitre 2

## *Calcul des conduites sous pression*

### Objectifs

- 1- Savoir appliquer le théorème de Bernoulli et connaître les hypothèses sous-jacentes.
- 2- Généraliser le théorème de Bernoulli pour tenir compte des pertes de charge et de la présence de pompes et de turbines.
- 3- Savoir tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique le long de l'écoulement.
- 4- Calculer le débit, le diamètre, le coefficient de frottement et la perte de charge dans une conduite.
- 5- Trouver les caractéristiques de la conduite équivalente pour des conduites placées en série et en parallèle.
- 6- Savoir tracer et utiliser la courbe caractéristique d'une conduite ou d'un ensemble de conduites.

## 2.1 Définitions

On définit la *hauteur de charge totale* d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle, de la pression et de l'énergie cinétique par unité de poids, soit :

$$H_t = Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \quad (2.1)$$

- où
- $H_t$  est la hauteur de charge totale en mètres de liquide,
  - $Z$  est la cote du point considéré par rapport à un niveau de référence, en mètres,
  - $P$  est la pression au point considéré, en pascals,
  - $\rho$  est la masse volumique du liquide, en kg par mètre cube,
  - $g$  est l'accélération due à la gravité, en mètres par seconde<sup>2</sup>,
  - $V$  est la vitesse du liquide en mètres par seconde.

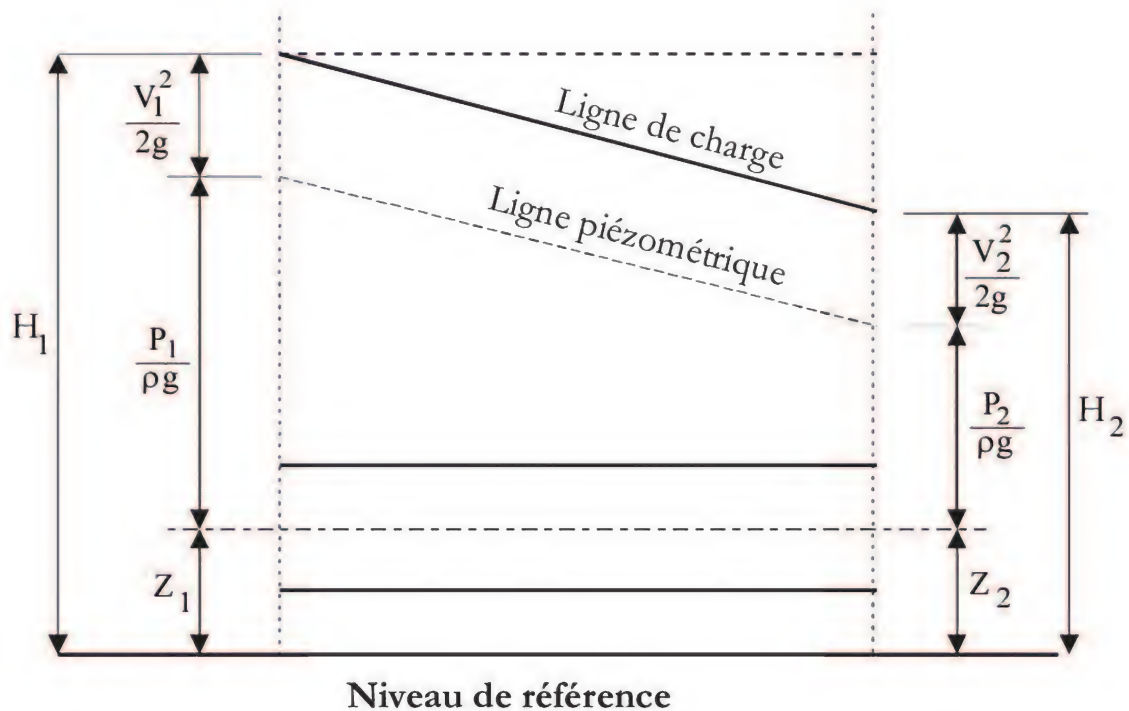


Fig. 2.1 Charges hydrauliques

On appelle ligne de charge le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H_t(x) = Z(x) + \frac{P(x)}{\rho g} + \frac{V^2(x)}{2g} \quad (2.2)$$

où  $x$  indique que les quantités sont des fonctions de la distance mesurée le long de la direction générale de l'écoulement.

On définit la hauteur piézométrique d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle et de la pression par unité de poids :

$$H = Z + \frac{P}{\rho g} \quad (2.3)$$

On appelle ligne piézométrique le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H(x) = Z(x) + \frac{P(x)}{\rho g} \quad (2.4)$$

En pratique, on travaille le plus souvent avec la ligne piézométrique plutôt qu'avec la ligne d'énergie pour les raisons suivantes :

- a) La ligne piézométrique a une signification plus matérielle que la ligne d'énergie. Pour les écoulements à surface libre, la ligne piézométrique est confondue avec la surface libre de l'eau. Pour les écoulements en charge, la ligne piézométrique représente le niveau qu'atteint l'eau grâce à sa pression quand elle réussit à se frayer un chemin. À titre d'exemple, lorsqu'un réseau d'égout se met en charge, la ligne piézométrique indique la hauteur des eaux dans les regards et permet d'identifier les régions problématiques où l'eau peut pénétrer dans les sous-sols des maisons. Pour un réseau de distribution d'eau potable, la ligne piézométrique indique en chaque point la pression résiduelle disponible chez le consommateur.
- b) Dans la plupart des applications en hydraulique et en géotechnique, le terme  $V^2/2g$  est faible comparativement aux autres termes de la charge totale. En effet, pour différentes considérations (abrasion, coup de bélier), on fera la conception des installations de telle sorte que la vitesse soit de l'ordre de 1m/s. Avec une vitesse de cet ordre de grandeur, le terme  $V^2/2g$  n'est que d'environ 0,05m alors que la charge de pression est de l'ordre de quelques dizaines de mètres.



- c) Remarquons finalement que dans la plupart des applications la ligne piézométrique et la ligne d'énergie sont parallèles. La connaissance de l'une induit automatiquement la connaissance de l'autre. C'est le cas d'une conduite de diamètre constant.

## 2.2 Théorème de Bernoulli

Comme pour la masse, la loi de conservation de l'énergie exprime le principe que l'énergie ne peut être ni créée ni anéantie. Elle ne peut être que transformée d'une forme à une autre.

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation d'énergie dans un écoulement permanent, unidimensionnel, incompressible d'un liquide idéal (sans dissipation d'énergie). Il s'écrit entre deux sections quelconques d'une ligne de courant sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 \quad (2.5)$$

ou plus explicitement :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (2.6)$$

Il est important d'avoir à l'esprit les hypothèses de départ qui ont permis d'aboutir à une formule ou à une équation. Si dans un contexte donné une des hypothèses n'est pas vérifiée, l'utilisation d'une telle formule ou équation peut être erronée car la solution obtenue peut devenir aberrante. Examinons les quatre hypothèses qui sont à la base du théorème de Bernoulli.

### 1) Hypothèse 1 : écoulement permanent.

L'hypothèse de l'écoulement permanent signifie qu'aucune grandeur qui figure dans l'équation 2.6 ne dépend du temps. Si cette hypothèse n'était plus vérifiée, en totalité ou avec une bonne approximation, un terme additionnel traduisant cette non permanence devrait être pris en considération. L'équation de Bernoulli s'écrit dans ce cas :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int \frac{\partial V}{\partial t} dx \quad (2.7)$$

Le terme additionnel  $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dx$  représente le travail par unité de poids des forces d'inertie entre les points 1 et 2 selon la direction x.

2) Hypothèse 2 : écoulement unidimensionnel et unidirectionnel.

L'hypothèse de l'écoulement unidimensionnel et unidirectionnel signifie que l'écoulement possède une seule composante de la vitesse  $V_x$  qui varie uniquement dans la direction d'écoulement x. En fait, cette deuxième hypothèse n'est jamais strictement vérifiée car la vitesse varie aussi dans la direction transversale de l'écoulement. Au contact des parois, la condition d'adhérence se traduit par une vitesse nulle. La vitesse augmente avec la distance par rapport aux parois pour atteindre une valeur maximale au centre de la conduite. Pour remédier à ce problème, on prend en considération la vitesse moyenne d'écoulement et on introduit un coefficient de correction de l'énergie cinétique  $\alpha$  sous la forme suivante :

$$H_t = Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.8)$$

avec 
$$\alpha = \frac{\int_A V^3 dA}{AV^3} \quad (2.9)$$

La hauteur piézométrique est calculée au centre de la conduite pour un écoulement en charge et à la surface de l'eau pour un écoulement à surface libre. Comme en pratique les valeurs de  $\alpha$  sont comprises entre 1,04 et 1,12, on adopte généralement une valeur de  $\alpha = 1$ .

3) Hypothèse 3 : écoulement incompressible.

En hydraulique, où la matière d'intérêt est principalement l'eau, l'hypothèse de l'écoulement incompressible peut être considérée comme satisfaite dans la plupart des applications

4) Hypothèse 4 : liquide idéal.

Le liquide idéal n'existe pas. Tous les liquides, en particulier l'eau, possèdent une viscosité qui génère des forces de frottement.

Ces forces de frottement, qui sont responsables de la dissipation d'énergie, sont toujours présentes dans l'écoulement même si parfois elles peuvent être

considérées comme négligeables. L'examen de la formule de calcul des pertes de charge exposée au paragraphe 2.4 peut confirmer ou infirmer cette hypothèse en fonction de chaque cas.

### Application 2.1

On considère le siphon schématisé par la figure 2.2. Le diamètre de la conduite est de 2,0cm. Il s'agit de calculer la vitesse et la pression aux points 1, 2, 3 et 4.

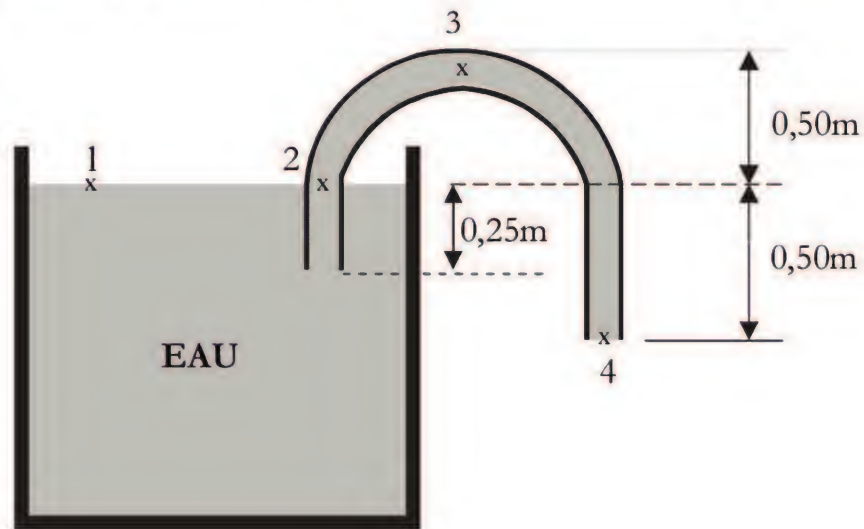


Fig. 2.2. Écoulement dans un siphon

Solution :

Par application du théorème de Bernoulli entre les points 2 et 4 :

$$Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = Z_4 + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g}.$$

Comme le diamètre du siphon est constant, la vitesse aussi est constante (voir paragraphe 1.2.3.1) :  $V_2 = V_4$ .

Il s'ensuit que  $\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g}$ . En prenant l'origine des énergies

potentielles au point le plus bas (point 4), on obtient :  $Z_2 = 0,5\text{m}$  et  $Z_4 = 0$ .



Par ailleurs, la pression  $P_4$  égale la pression atmosphérique :  $P_4/\rho g = 10,33\text{m}$  (eau).

En utilisant ces résultats, l'équation de Bernoulli donne :

$$\begin{aligned} \left( \frac{P_2}{\rho g} \right)_{\text{absolue}} &= \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - 0,5\text{m} = 10,33\text{m} - 0,50\text{m} = 9,83\text{m} \text{ ou} \\ \left( \frac{P_2}{\rho g} \right)_{\text{relative}} &= -0,50\text{m}. \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $P_3$ , l'application du théorème de Bernoulli entre les

points 2 et 3 donne :  $Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}$ , soit

$$0 + 9,83\text{m} = 0,50\text{m} + \frac{P_3}{\rho g}, \text{ } V_2 \text{ étant égale à } V_3 \text{ (diamètre constant).}$$

$$\text{Donc } \left( \frac{P_3}{\rho g} \right)_{\text{absolue}} = 9,83\text{m} - 0,50\text{m} = 9,33\text{m}.$$

Pour calculer la vitesse  $V_2$ , on applique le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}, \text{ soit } 0 + 0 + 0 = 0 + (-0,50\text{m}) + \frac{V_2^2}{2g}.$$

$$\text{Donc } V_2 = \sqrt{g} = 3,13\text{m/s}.$$

#### Remarque :

Il serait intéressant d'analyser la validité des quatre hypothèses qui sont à la base du théorème de Bernoulli dans ce cas précis. L'hypothèse d'écoulement permanent peut être valide dans deux cas : 1) le réservoir est de grandes dimensions comparativement au diamètre du siphon, 2) le réservoir est alimenté par une source externe pour compenser le débit soutiré. L'hypothèse de non dissipation d'énergie pourra être validée à l'aide des formules de perte de charge qui sont exposées ultérieurement. On pourra alors comparer les résultats obtenus plus haut avec ceux obtenus en tenant compte des pertes de charge.

### 2.3 Équation de Bernoulli généralisée

L'équation de Bernoulli exposée à la section 2.2 peut être appliquée pour un tronçon de conduite très court sur lequel on peut supposer que les pertes de charge par frottement sont faibles.

D'une manière générale, les pertes de charge ne peuvent pas être négligées et il faut par conséquent généraliser l'équation (2.5).

Désignons par  $h_f$  la perte de charge par frottement par unité de poids de liquide entre les points 1 et 2 (fig. 2.3). L'équation de Bernoulli corrigée se présente sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 + h_f \quad (2.10)$$

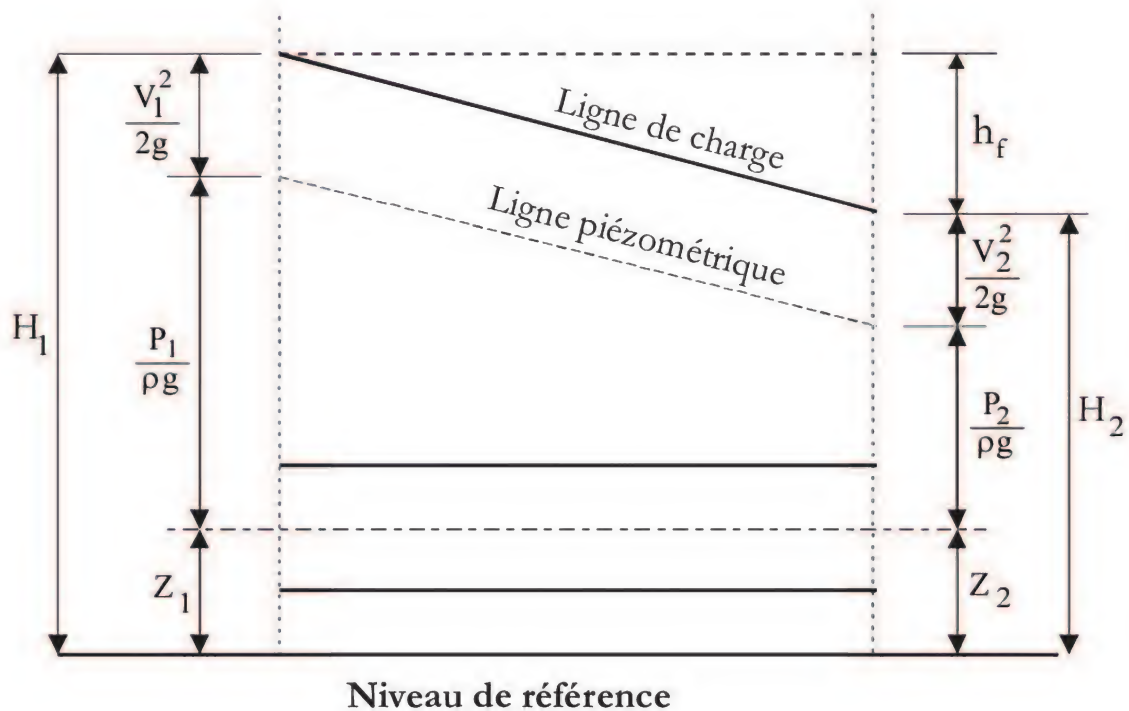


Fig. 2.3. Charges hydrauliques et perte de charge

Par ailleurs, dans tout système hydraulique, il existe un certain nombre de singularités qui produisent des pertes de charge locales par turbulence (coudes, vannes, changements de diamètre...). Afin de prendre en considération ces différentes pertes de charge  $h_s$ , l'équation 2.10 se complète comme suit :

$$H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s \quad (2.11)$$

Finalement, la présence de pompes entre les points 1 et 2 fournit au système hydraulique une hauteur manométrique  $H_p$  alors que les turbines consomment une hauteur  $H_T$ , de telle sorte que l'équation 2.11 se généralise sous l'une des formes :

$$H_p + H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s \quad (2.12a)$$

ou

$$H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s + H_T \quad (2.12b)$$

où  $H_1$  est la charge initiale,  
 $H_p$  est la charge produite par une pompe,  
 $H_2$  est la charge finale,  
 $h_f$  est la charge perdue par frottement,  
 $\sum h_s$  est la charge perdue dans les singularités,  
 $H_T$  est la charge utile consommée par une turbine.

Soulignons encore que chacun des termes d'énergie dans les équations 2.12a et 2.12b est exprimé en hauteur par unité de poids du liquide. Pour trouver l'énergie fournie par la pompe  $W_p$  (joules) ou consommée par la turbine, il faut multiplier  $H_p$  ou  $H_T$  par le poids  $mg$  du liquide déplacé. Ainsi, pour la pompe :

$$W_p = mgH_p = \rho SgH_p \quad (2.13)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  
 $S$  est le volume du liquide pompé ( $\text{m}^3$ ),  
 $g$  est l'accélération due à la gravité ( $\text{m}/\text{s}^2$ ).

Comme  $S = tQ$ , on obtient :

$$W_p = \rho g t Q H_p \quad (2.14)$$

où  $Q$  est le débit de pompage ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),  
 $t$  est la durée de pompage (s).

La puissance étant énergie/temps, la puissance de la pompe est donc :

$$P_p = \frac{W}{t} = \rho g Q H_p \quad (2.15)$$



Pour une turbine, on trouve d'une manière similaire :

$$P_T = \rho g Q H_T \quad (2.16)$$

L'énergie perdue par frottement se calcule de la même manière en substituant  $h_f$  à  $H_p$  dans la relation (2.15).

En système SI, l'énergie est en joules (newtons-mètres) et la puissance est en watts (joules/seconde).

## 2.4 Calcul des pertes de charge par frottement

Les pertes de charge linéaires sont dues principalement aux forces de frottement des molécules d'eau contre une paroi fixe.

### 2.4.1 Définitions

Un fluide est une substance qui se déforme continuellement sous l'effet d'un effort de cisaillement :

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (2.17)$$

où  $F$  est la force tangentielle appliquée, en newtons,  
 $A$  est la surface de cisaillement, en  $m^2$ .

Pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est définie par la relation suivante :

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.18)$$

où  $\frac{\partial v}{\partial y}$  est le gradient de vitesse.

La viscosité dynamique  $\eta$  ( en pascals-secondes ) exprime le degré de cohésion entre les particules d'un fluide pour résister à l'écoulement.

Le rapport de la viscosité dynamique  $\eta$  à la masse volumique  $\rho$  est appelé viscosité cinématique  $\nu$  (en  $m^2/s$ ):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.19)$$

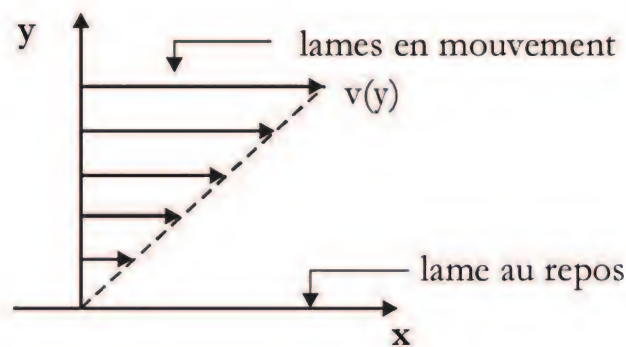


Fig. 2.4 Écoulement d'un fluide visqueux

Le tableau 2.1 fournit, pour différentes températures, la viscosité cinématique et la densité de l'eau par rapport à la masse volumique de  $1000\text{kg/m}^3$  à  $4^\circ\text{C}$ .

Temp $^\circ\text{C}$	Densité	$\nu$ $\text{m}^2/\text{s}$
5	1,000	$1,520 \times 10^{-6}$
10	1,000	$1,308 \times 10^{-6}$
15	0,999	$1,142 \times 10^{-6}$
20	0,998	$1,007 \times 10^{-6}$
25	0,997	$0,897 \times 10^{-6}$
30	0,995	$0,804 \times 10^{-6}$
35	0,993	$0,727 \times 10^{-6}$
40	0,991	$0,661 \times 10^{-6}$
50	0,990	$0,556 \times 10^{-6}$
65	0,980	$0,442 \times 10^{-6}$

Tableau 2.1 Densité et viscosité cinématique de l'eau

### 2.4.2 Formulation générale de la perte de charge

Nous proposons de calculer la perte de charge par frottement  $h_f$  à l'aide de la formule générale suivante :

$$h_f = KL \frac{Q^n}{D^m} \quad (2.20)$$

où  $K$ ,  $n$  et  $m$  sont des constantes,  
 $L$  est la longueur de la conduite (m),  
 $D$  est le diamètre de la conduite (m),  
 $Q$  est le débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

### 2.4.3 Formule de Darcy-Weissbach

En utilisant dans la formule 2.20 les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}K &= 0,0827 f \\n &= 2 \\m &= 5\end{aligned}$$

on obtient la forme suivante de la formule de Darcy-Weissbach :

$$h_f = 0,0827 f L \frac{Q^2}{D^5} \quad (2.21)$$

Lorsqu'on doit travailler avec la vitesse d'écoulement plutôt qu'avec la débit, on peut substituer  $V^2/2g$  à  $0,0827Q^2/D^4$  et on obtient l'équation traditionnelle de Darcy :

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Le coefficient de frottement  $f$  dépend de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $Re$  qui est défini comme suit :

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu} \quad (2.22)$$

où  $\varepsilon$  est la hauteur moyenne des aspérités de la surface intérieure de la conduite (voir tableau 2.2),  
 $D$  est le diamètre de la conduite,  
 $V$  est la vitesse moyenne d'écoulement,  
 $\rho$  est la masse volumique du liquide,  
 $\mu$  est la viscosité dynamique du liquide,  
 $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide ( $\nu = \mu/\rho$ , voir tab. 2.1)

Rappelons que l'ordre de grandeur de  $Re$  est un indicateur du type d'écoulement. Lorsque  $Re < 2400$ , l'écoulement est laminaire. Lorsque  $Re > 5000$ , l'écoulement est turbulent. Entre ces deux limites, l'écoulement est transitoire.

Lorsque l'écoulement est turbulent, la formule générale de Colebrook (1939) fournit le coefficient de frottement  $f$  en fonction de  $\varepsilon/D$  et  $Re$  :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (2.23)$$

Matériaux	RUGOSITÉ ABSOLUE $\epsilon$ (millimètres)
Métal étiré non ferreux : aluminium, laiton, cuivre	0,003
Conduites non métalliques : verre, plastique	0,003
Matériaux vitrifiés	0,03
Amiante-ciment, PVC	0,015
Bois	0,07
Enrobé d'asphalte centrifugé	0,03
Enrobé de béton centrifugé	0,03
Fer forgé	0,06
Fer forgé rouillé	0,6
Acier non protégé	0,03
Acier enduit	0,06
Acier galvanisé	0,15
Fonte enduite	0,16
Fonte non protégée	0,3

Tableau 2.2 Valeurs indicatives de la rugosité absolue

Remarquons que la formule 2.23 est implicite (par opposition à explicite) car l'inconnue  $f$  se trouve dans les membres de gauche et de droite de cette équation. Une méthode de résolution itérative, disponible sur calculatrice programmable, est donc nécessaire pour obtenir la solution.

Le calcul du coefficient de frottement  $f$  peut devenir explicite par l'utilisation de la formule suivante :

$$f = 0,0055 \left[ 1 + \left( 2 \cdot 10^4 \frac{\epsilon}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (2.23a)$$

Cette formule approchée donne une erreur maximale de  $\pm 1\%$  par rapport à Colebrook tant que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$10^{-6} < \frac{\epsilon}{D} < 10^{-2} \quad \text{et} \quad 5 \cdot 10^3 < Re < 10^8$$

Le diagramme de Moody (1944) présenté à la figure 2.5, en coordonnées logarithmiques, permet d'obtenir directement le coefficient de frottement  $f$  en fonction de la rugosité ( $\epsilon/D$ ) et du nombre de Reynolds.



Lorsque le régime d'écoulement est laminaire, on peut démontrer que le coefficient de frottement  $f$  ne dépend que du nombre de Reynolds par la relation :

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (2.24)$$

Par ailleurs, soulignons qu'en hydraulique le régime d'écoulement n'est pratiquement jamais laminaire.

En effet, en adoptant une vitesse raisonnable de 1m/s et une viscosité cinématique aux conditions courantes de l'ordre de  $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ , il faut que le diamètre de la conduite soit inférieur à 2,4mm pour avoir  $\text{VD}/\nu < 2400$ . Ce n'est jamais le cas pour les installations hydrauliques de génie civil.

La formule de Darcy-Weissbach est précise mais du fait que le coefficient de frottement  $f$  dépend du diamètre et du débit ( $\varepsilon/D$ ,  $4Q/\pi D\nu$ ), elle présente certains inconvénients liés au caractère implicite des calculs hydrauliques. En effet, examinons les différents types de problèmes qui peuvent se poser à l'ingénieur.

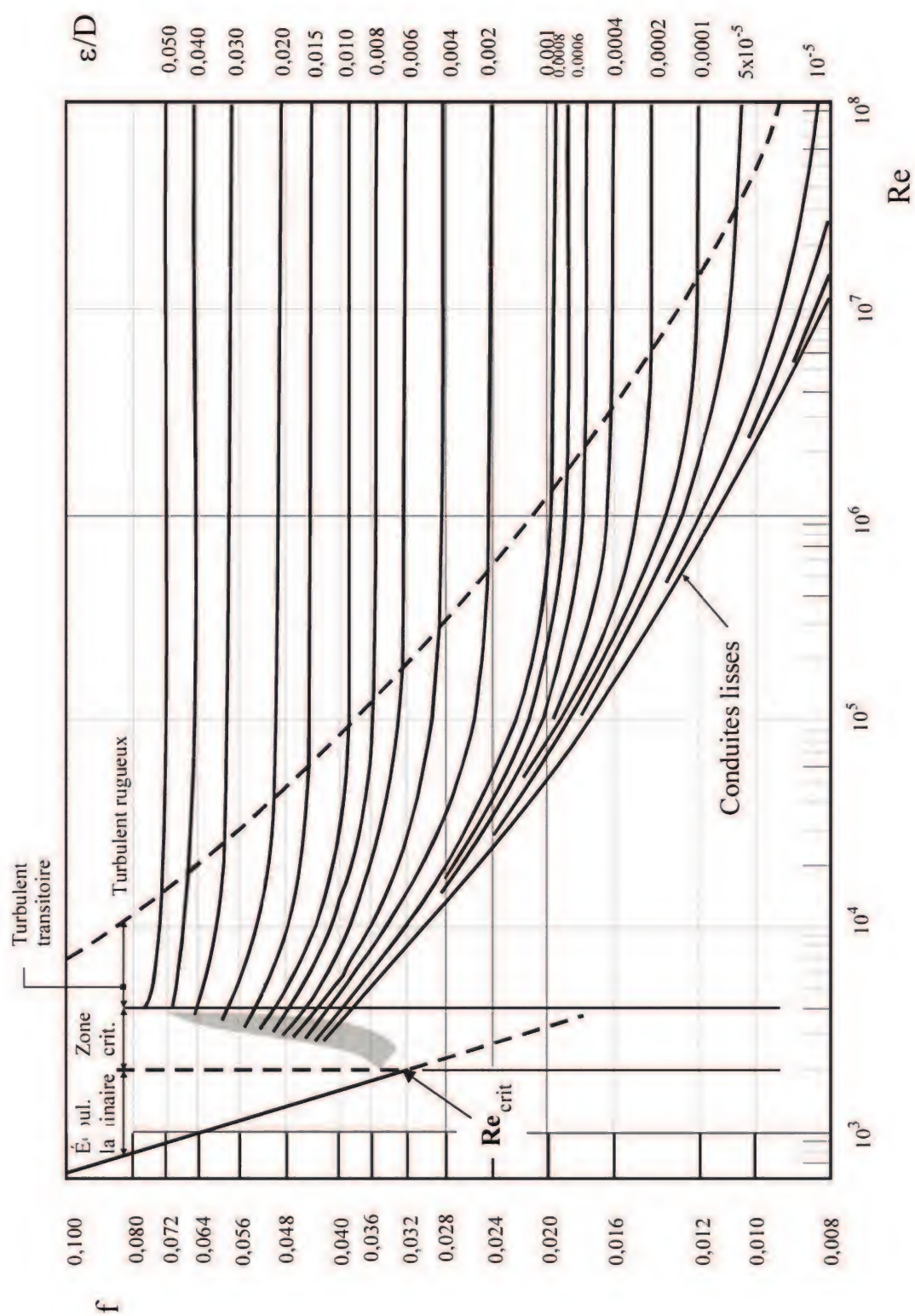


Fig. 2.5 Diagramme de Moody

## Application 2.2

### 1) Calcul de $h_f$

L'ingénieur a identifié une bonne source d'eau située à une cote  $Z_1 = 1000\text{m}$  et ayant une température de  $15^\circ\text{C}$ . Il peut faire écouler cette eau d'une manière gravitaire pour remplir un réservoir de stockage (fig. 2.6).

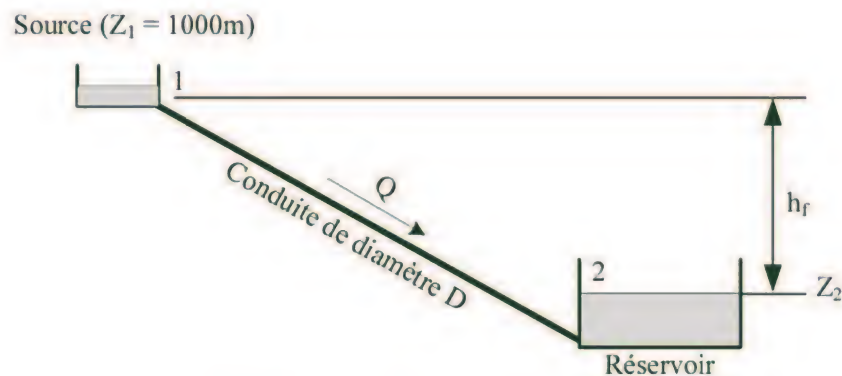


Fig. 2.6 Exemple d'écoulement gravitaire

Supposons que le débit de la source soit limité à une valeur  $Q = 1,0\text{m}^3/\text{s}$ . À cause de certaines considérations matérielles et techniques, le diamètre de la conduite a été fixé à  $0,60\text{m}$ , la longueur à  $1,0\text{km}$  et le matériau de la conduite est de la fonte ( $\epsilon = 0,06\text{mm}$ ). La question est : à quelle cote  $Z_2$  placer le réservoir de stockage?

Solution :

L'application de l'équation de Bernoulli entre la source (point 1) et la surface libre du réservoir (point 2) donne en négligeant les pertes de charge singulières :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (2.25)$$

Les pressions atmosphériques se neutralisent et les vitesses sont nulles, si bien que l'équation 2.25 s'écrit :  $Z_2 = Z_1 - h_f$ , soit :

$$Z_2 = Z_1 - 0,0827 f L Q^2 / D^5.$$

Le calcul de la cote  $Z_2$  revient donc à un calcul de pertes de charge.



Le coefficient de frottement  $f(\epsilon/D, 4Q/\pi Dv) = f(10^{-4}, 1,86 \cdot 10^6)$ . Le diagramme de Moody permet de trouver  $f = 0,0128$ . L'altitude  $Z_2$  de la surface libre du réservoir de stockage se calcule par :

$$Z_2 = 1000\text{m} - 0,0827 \cdot 0,0128 \cdot 1000 \cdot 1^2/0,6^5 = 986,38\text{m}.$$

### 2) Calcul du diamètre

On traite le même problème que précédemment sauf qu'on suppose maintenant que la municipalité a identifié un emplacement stratégique pour le réservoir et par conséquent l'altitude  $Z_2 = 986,38\text{m}$  trouvée précédemment est maintenant connue. Les autres paramètres étant par ailleurs inchangés, on demande à l'ingénieur de calculer le diamètre de la conduite qui devient l'inconnue du problème.

Solution :

L'équation de Bernoulli écrite pour les mêmes points 1 et 2 fournit

$$Z_1 - Z_2 = h_f = 0,0827 f L Q^2/D^5$$

$$\text{soit } 1000\text{m} - 986,38\text{m} = 0,0827 f \{[(6 \cdot 10^{-5}/D), (1,11 \cdot 10^6/D)] \cdot 1000\} \cdot 1^2/D^5.$$

On voit que la formule de calcul du diamètre  $D$  n'est pas explicite et que le recours à une calculatrice programmable est nécessaire pour retrouver  $D = 0,6\text{m}$ .

### 3) Calcul du débit

On suppose cette fois que les altitudes de la source et du réservoir du problème précédent sont imposées et que le diamètre de la conduite a été fixé a priori. La seule inconnue du problème est maintenant le débit d'écoulement. L'équation de Bernoulli entre la source et le réservoir s'écrit comme précédemment

$$Z_1 - Z_2 = h_f = 0,0827 f L Q^2/D^5.$$

Avec les données du problème on obtient :

$$1000\text{m} - 986,38\text{m} = 0,0827 f \{[(6 \cdot 10^{-5}/0,6), (1,86 \cdot 10^6 \cdot Q)]\} \cdot 1000 \cdot Q^2/0,6^5.$$

Encore une fois on trouve une formule qui n'est pas explicite pour calculer le débit et on doit recourir à des calculs itératifs supportés par une calculatrice programmable. On trouve ainsi la solution :

$$Q = 1\text{m}^3/\text{s}.$$



*Remarque :*

Le lecteur intéressé par la valeur de la rugosité  $\varepsilon$  pour d'autres matériaux, peut consulter Lencastre (1999). Il est cependant difficile d'avoir une bonne estimation de cette rugosité autrement que par la mesure.

#### 2.4.4 Formule de Hazen-Williams

La formule de Darcy-Weissbach pour le calcul des pertes de charge s'applique à tous les liquides quelle que soit leur température. Cependant cette formule, bien que précise, présente l'inconvénient des calculs itératifs dus au fait que le coefficient de frottement  $f$  dépend du diamètre et du débit ( $\varepsilon/D$ ,  $4Q/\pi Dv$ ).

Ces calculs deviennent beaucoup plus laborieux lorsqu'il s'agit par exemple de calculer les débits et les pressions dans un réseau de distribution d'eau comptant quelques centaines, voire des milliers, de tronçons de conduites.

C'est la raison pour laquelle les ingénieurs préfèrent utiliser la formule de Hazen-Williams qui est obtenue de l'équation 2.20 quand  $K = 10,675/(C_{HW})^{1,852}$ ,  $n = 1,852$  et  $m = 4,87$ . La formule de Hazen-Williams s'écrit alors :

$$h_f = 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.26)$$

$C_{HW}$  est une constante qui ne dépend ni du débit ni du diamètre. Elle dépend seulement du matériau et du type de recouvrement utilisé pour la protection intérieure de la conduite. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette formule n'est valable que pour l'eau à une température ordinaire (15°C). Le tableau 2.3 fournit les ordres de grandeur du coefficient  $C_{HW}$  pour les matériaux usuels.

Il est évident que le coefficient  $C_{HW}$  diminue généralement avec l'âge de la conduite. L'agressivité de l'effluent, son potentiel hydrogène (pH), sa dureté ainsi que les phénomènes d'érosion, d'abrasion et de corrosion affectent aussi significativement la valeur du coefficient  $C_{HW}$ .

Les valeurs fournies au tableau 2.3 le sont à titre indicatif car il est impossible de connaître pour une vieille conduite, autrement que par la mesure, la valeur exacte du coefficient  $C_{HW}$ .

Matériau	$C_{HW}$
PVC	150
Amiante-ciment	140
Béton lissé	130
Acier soudé, neuf	120 - 140
Fonte neuve	130 - 140
Fonte âgée (10 ans)	110
Fonte âgée (20 ans)	100
Fonte âgée (30 ans)	85
Fonte âgée (40 ans)	75
Fonte âgée (50 ans)	70

Tableau 2.3 Valeurs du coefficient  $C_{HW}$ 

Adapté de Brière (1997)

### Application 2.3

Reprenons les mêmes problèmes que ceux vus dans l'application 2.2 en utilisant cette fois la formule de Hazen-Williams. On donne la constante  $C_{HW} = 140$  pour la fonte.

#### 1) Calcul de $h_f$

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1 - h_f = Z_1 - 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} 1/D^{4,87} \\ &= 1000 - 10,675 \cdot 1000 (1/140)^{1,852} 1/(0,6)^{4,87} \\ &= 986,38\text{m} \end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui trouvé par la formule de Darcy-Weissbach. Mais la concordance n'est pas toujours parfaite car la formule de Hazen-Williams est moins précise.

#### 2) Calcul du diamètre

$$Z_1 - Z_2 = 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} / D^{4,87}$$

Soit

$$D = \left[ \frac{10,675 \times L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852}}{Z_1 - Z_2} \right]^{1/4,87} = \left[ \frac{10,675 \cdot 1000 \left( \frac{1}{140} \right)^{1,852}}{13,62} \right]^{1/4,87} = 0,6\text{m}$$

Cette valeur était la donnée de départ.

#### 3) Calcul du débit

$$Z_1 - Z_2 = 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} / D^{4,87}$$

$$Q = C_{HW} \left( \frac{(Z_1 - Z_2) D^{4,87}}{10,675 \cdot L} \right)^{1/1,852} = 140 \left( \frac{13,62 \cdot (0,6)^{4,87}}{10,675 \cdot 1000} \right)^{1/1,852} = 1\text{m}^3/\text{s}$$

Soit exactement la valeur de départ.

### 2.4.5 Relation entre les deux formules de perte de charge

Pour trouver la relation entre le coefficient de frottement  $f$  dans la relation de Darcy-Weissbach et le coefficient  $C_{HW}$  on égalise les deux formules :

$$h_f = 0,0826 f L \frac{Q^2}{D^5} = 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.27)$$

Par ailleurs, l'expression du nombre de Reynolds défini par (2.22) peut être réécrite sous la forme :

$$Q = \frac{\pi D}{4} v Re \quad (2.28)$$

En substituant (2.28) dans (2.27) et utilisant la valeur de la viscosité cinématique à la température de l'eau à 15°C, on obtient :

$$f = \frac{1014}{C_{HW}^{1,852} Re^{0,148}} \frac{1}{D^{0,0184}} \quad (2.29)$$

Pour toute la gamme des diamètres standard utilisés en hydraulique,  $D^{0,0184}$  est approximativement égal à 1, si bien que (2.29) peut s'écrire :

$$f = \frac{1014}{C_{HW}^{1,852} Re^{0,148}} \quad (2.30)$$

## 2.5 Calcul des pertes de charge singulières

### 2.5.1 Généralités

Les singularités hydrauliques sont présentes dans tous les réseaux. Il peut s'agir de coudes, clapets, vannes, chutes, changements de pente ou de section, entrée ou sortie d'un réservoir, grilles, branchements et bifurcations, regard... Toutes ces singularités sont responsables d'une dissipation d'énergie par turbulence qui affecte l'écoulement. Dans beaucoup de situations où le système hydraulique analysé est très étendu et les singularités hydrauliques sont modérées, les pertes de charge singulières peuvent être négligées par rapport aux pertes de charge linéaires par frottement. Dans d'autres situations, les pertes de charge singulières



deviennent très importantes, voire même prépondérantes par rapport aux pertes de charge linéaires et ne peuvent plus être négligées.

En tout état de cause, les méthodes de calcul de ces pertes de charge singulières seront exposées. Une formule simple permettra de mesurer l'importance des pertes de charge singulières par rapport aux pertes de charge linéaires.

D'une manière générale, les pertes de charge singulières peuvent être estimées à l'aide de la formule suivante :

$$h_s = K \frac{V^2}{2g} \quad (2.31)$$

ou encore, en remplaçant  $V$  par  $4Q/\pi D^2$  :

$$h_s = 0,0827 \cdot K \frac{Q^2}{D^4} \quad (2.32)$$

où  $V$  est la vitesse moyenne dans la conduite,  
 $D$  est le diamètre de la conduite,  
 $K$  est une constante qui dépend du type de singularité.

Les valeurs de  $K$  sont indiquées dans les paragraphes qui suivent pour donner des ordres de grandeur. Il existe parfois des différences notables entre les valeurs de  $K$  déclarées dans les différents ouvrages et manuels pour la même singularité. Ces différences peuvent s'expliquer principalement par la variation des dimensions et les variantes de fabrication.

### 2.5.2 Pertes de charge dans un élargissement brusque

Ces pertes de charge sont dues à l'expansion du fluide dans un espace plus grand s'accompagnant d'une diminution de vitesse et d'une augmentation de la pression. Borda (1733-1799) est le premier à avoir établi la formule de perte de charge dans un élargissement brusque. Par application de l'équation de quantité de mouvement au volume compris entre les sections 1 et 2 de la figure 2.7, on trouve :

$$h_s = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{V^2}{2g} \quad (2.33)$$



Le coefficient de perte de charge singulière vaut par conséquent :

$$K = \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (2.34)$$

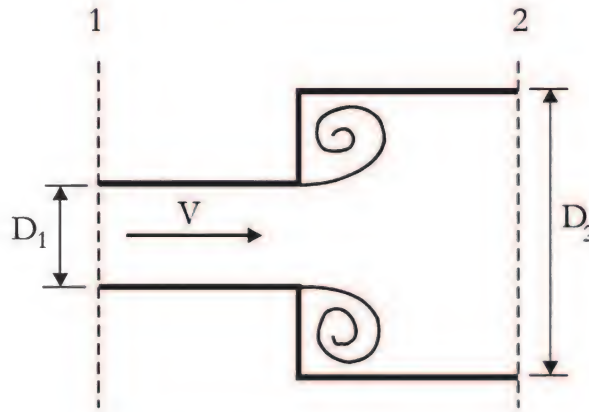


Fig. 2.7 Élargissement brusque

*Remarques :*

- 1) La vitesse  $V$  à prendre en considération dans les calculs est celle qui prévaut avant l'élargissement (Fig. 2.7).
- 2) Lorsqu'une conduite débouche dans un réservoir,  $D_1/D_2$  tend vers 0 et  $K=1$ . Cela signifie que toute l'énergie cinétique  $V^2/2g$  que possède l'eau dans la conduite s'annule totalement et instantanément par effet de choc contre la masse d'eau stagnante dans le réservoir.

### 2.5.3 Pertes de charge dans un rétrécissement

Ce phénomène est similaire à celui de l'élargissement brusque. Le décollement de la veine liquide au niveau du rétrécissement provoque une contraction de la section d'écoulement qui passe de  $A_1$  à  $A_c$  (Fig. 2.8). La section d'écoulement augmente ensuite comme dans un élargissement progressif pour atteindre  $A_2$ .

Au niveau de la section contractée  $A_c$ , la vitesse augmente et la pression diminue avec un risque de cavitation.

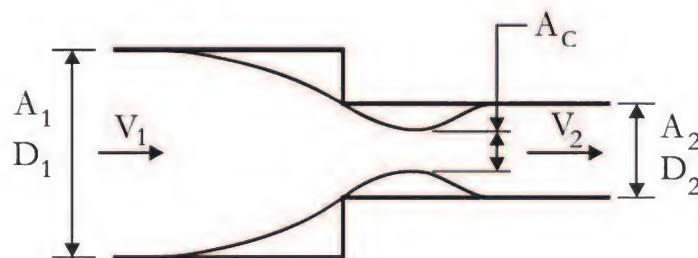


Fig. 2.8 Rétrécissement brusque

Le tableau 2.4 fournit des valeurs de  $K$  en fonction de  $D_2/D_1$ . Notons que pour une prise d'eau dans un réservoir, la constante  $K$  est 0,50. Quand cette prise d'eau est bien profilée, la constante  $K$  peut descendre jusqu'à 0,04 (figure 2.9).

$D_2/D_1$	$K$
0,2	0,56
0,4	0,52
0,6	0,43
0,8	0,21

Tableau 2.4 Valeurs de  $K$  pour rétrécissement brusque

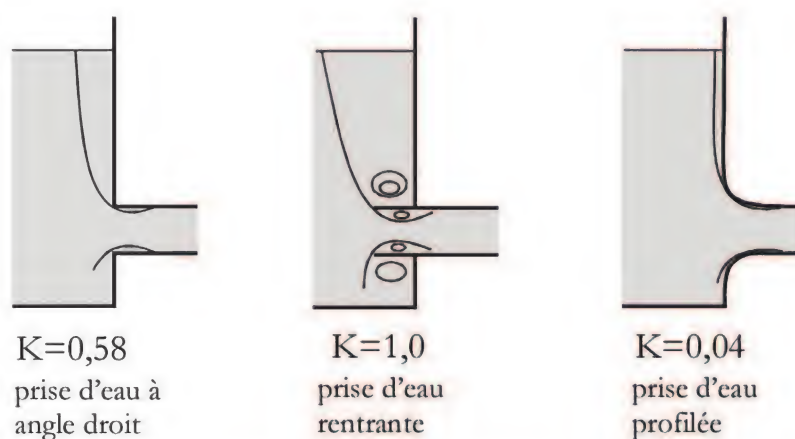


Fig. 2.9 Prises d'eau dans un réservoir

#### 2.5.4 Pertes de charge dans une dérivation latérale

Les valeurs du coefficient de pertes de charge singulières dans la dérivation latérale (figure 2.10) dépendent de l'angle  $\alpha$ , tel que montré dans le tableau 2.5.

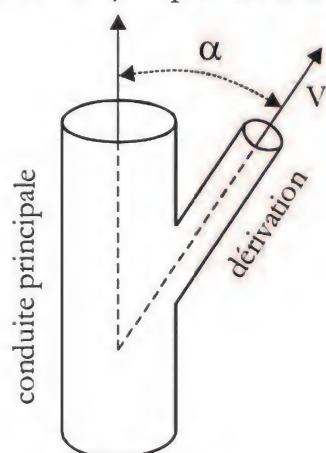


Fig. 2.10 Dérivation latérale

$\alpha$ (degrés)	$K$
15	0,1
30	0,3
45	0,5
60	0,7
90	1,3

Tableau 2.5 Valeurs de  $K$  dans une dérivation

### 2.5.5 Pertes de charge dans les vannes et les robinets

Ces pertes de charge singulières sont causées principalement par l'élargissement brusque après la restriction causée par la vanne ou le robinet. Pour certaines vannes, la déviation de l'écoulement à travers un chemin sinueux cause une perte d'énergie supplémentaire. Le coefficient de perte de charge singulière  $K$  peut être nul quand la vanne est complètement ouverte mais peut atteindre une valeur infinie quand la vanne est complètement fermée. La valeur de  $K$  passe par toutes les valeurs entre ces deux extrêmes.

Pour un robinet vanne (figure 2.11), les ordres de grandeur des valeurs de  $K$  en fonction du degré de fermeture  $x/D$  sont donnés au tableau 2.6.

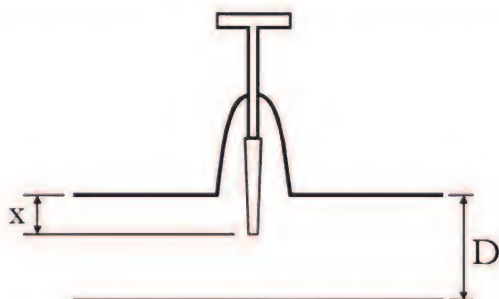


Fig. 2.11 Robinet vanne

$x/D$	$K$
1/8	0,1
1/4	0,3
1/2	2
3/4	20
7/8	100

Tableau 2.6  $K$  pour robinet vanne

Le tableau 2.7 fournit les ordres de grandeur du coefficient de perte de charge singulière  $K$  pour les vannes papillons (figure 2.12) pour différents angles d'orientation  $\alpha$  :

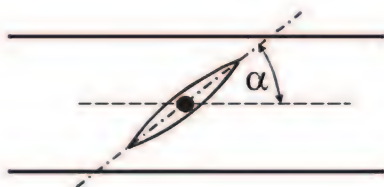


Fig. 2.12 Vanne papillon

$\alpha$ (degrés)	$K$
0 (100% ouvert)	0,30
10	0,50
20	1,50
30	3,80
40	10,5
50	32
60	105

Tableau 2.7  $K$  pour vannes papillons  
Adapté de Carlier (1972)



### 2.5.5 Pertes de charge dans les vannes et les robinets

Ces pertes de charge singulières sont causées principalement par l'élargissement brusque après la restriction causée par la vanne ou le robinet. Pour certaines vannes, la déviation de l'écoulement à travers un chemin sinueux cause une perte d'énergie supplémentaire. Le coefficient de perte de charge singulière  $K$  peut être nul quand la vanne est complètement ouverte mais peut atteindre une valeur infinie quand la vanne est complètement fermée. La valeur de  $K$  passe par toutes les valeurs entre ces deux extrêmes.

Pour un robinet vanne (figure 2.11), les ordres de grandeur des valeurs de  $K$  en fonction du degré de fermeture  $x/D$  sont donnés au tableau 2.6.

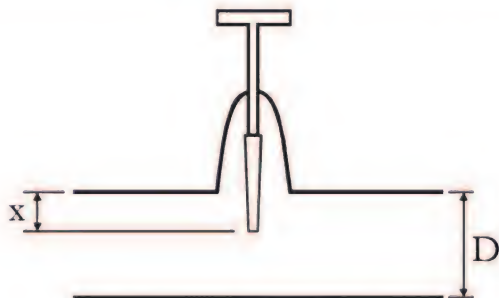


Fig. 2.11 Robinet vanne

$x/D$	$K$
1/8	0,1
1/4	0,3
1/2	2
3/4	20
7/8	100

Tableau 2.6  $K$  pour robinet vanne

Le tableau 2.7 fournit les ordres de grandeur du coefficient de perte de charge singulière  $K$  pour les vannes papillons (figure 2.12) pour différents angles d'orientation  $\alpha$  :

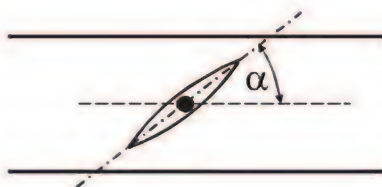


Fig. 2.12 Vanne papillon

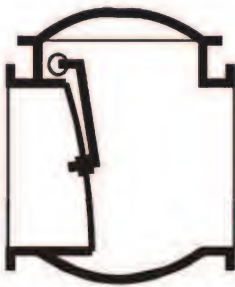
$\alpha$ (degrés)	$K$
0 (100% ouvert)	0,30
10	0,50
20	1,50
30	3,80
40	10,5
50	32
60	105

Tableau 2.7  $K$  pour vannes papillons  
Adapté de Carlier (1972)



La vanne papillon a l'avantage de se fermer très rapidement, ce qui la rend efficace pour isoler rapidement un tronçon de conduite en cas de bris. Il faut cependant faire attention au coup de bélier traité dans le chapitre 4.

Les clapets anti-retour (figure 2.13) sont utilisés principalement sur les conduites de refoulement. Ils permettent le passage de l'eau dans un sens prédéterminé sous l'effet de la pression. Quand le courant a tendance à s'inverser à la suite de l'arrêt d'une pompe ou du refoulement d'un réseau d'égout, le clapet se ferme pour empêcher une telle inversion.



Pour un clapet complètement ouvert,  $K$  peut varier entre 0,5 et 2,5.

Fig. 2.13 Clapet anti-retour

### 2.5.6 Pertes de charge dans les coudes

La déviation de l'écoulement dans un coude s'accompagne de forces centripètes qui modifient localement les champs de pression et de vitesse dans une section transversale à l'écoulement (fig. 2.14). Ainsi, dans un plan horizontal, la pression augmente en direction opposée au centre de courbure  $O$  selon la deuxième équation d'Euler :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{r} \quad (2.35)$$

où  $P$  est la pression,  
 $n$  est la coordonnée curviligne selon l'axe perpendiculaire,  
 $r$  est le rayon de courbure local,  
 $\rho$  est la masse volumique de l'eau,  
 $V$  est la vitesse d'écoulement.

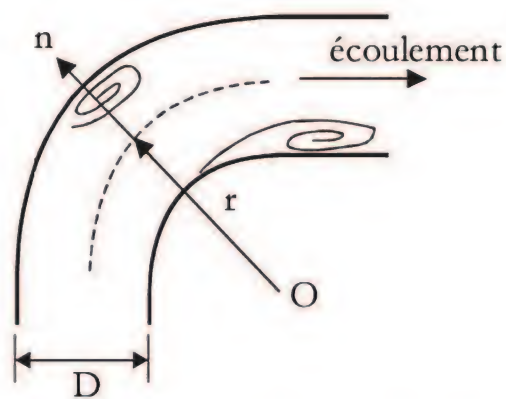


Fig. 2.14 Écoulement dans un coude

Inversement, la vitesse d'écoulement diminue en direction opposée au centre de courbure  $O$ . Cette perturbation locale de l'écoulement se manifeste par la formation de deux régions séparées qui sont le siège de mouvements tourbillonnaires consommateurs d'énergie.

Pour un coude à 90 degrés arrondi (figure 2.14), la valeur de  $K$  dépend directement du rapport  $r/D$  selon le tableau 2.8.

$r/D$	0,5	0,75	1	1,5	2	4	10	20
$K$	0,90	0,45	0,35	0,25	0,20	0,16	0,32	0,42

Tableau 2.8  $K$  pour coude arrondi

Adapté de Carlier (1972)

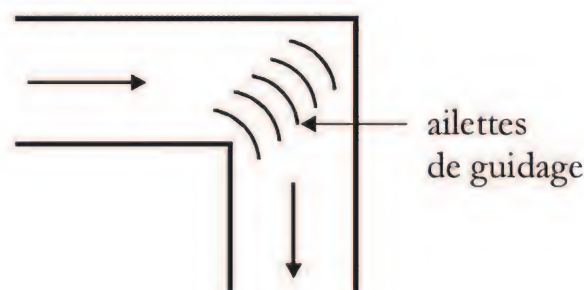


Fig. 2.15 Coude à 90° de section rectangulaire

Pour un coude à 90 degrés de section carrée ou rectangulaire, en l'absence d'ailettes, la valeur normale du coefficient  $K$  est  $K = 1,1$ . En présence d'ailettes de guidage, la valeur de  $K$  varie généralement entre 0,2 et 0,3 mais peut descendre jusqu'à 0,15 (figure 2.15). Les ailettes de guidage, dont le nombre varie normalement entre 5 et 15, sont faites en tôle ondulée.

## 2.6 Longueur équivalente

Deux formules différentes ont été proposées pour calculer les pertes de charge linéaires (2.21) et singulières (2.32). L'équation de Bernoulli corrigée qui tient compte de ces deux pertes de charges s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0,0827 f L \frac{Q^2}{D^5} + 0,0827 \frac{Q^2}{D^4} \sum K_i \quad (2.36)$$

Peut-on simplifier les calculs des pertes de charge? Considérons, à titre d'exemple, une vanne qui présente une singularité hydraulique et produit une perte de charge singulière selon l'équation (2.32). Pour simplifier les calculs, nous désirons remplacer (virtuellement) cette singularité par une conduite de longueur équivalente  $L_{eq}$  sur laquelle se produirait une perte de charge par frottement égale à la perte de charge singulière. C'est la longueur équivalente qui viendra majorer la longueur physique réelle pour tenir compte des pertes de charge singulières, tel que le montre schématiquement la figure 2.16.

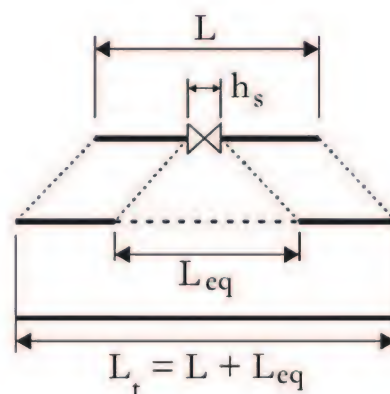


Fig. 2.16 Longueur équivalente d'une perte de charge singulière



Mathématiquement, on écrit :  $0,0827 f L_{eq} \frac{Q^2}{D^5} = 0,0827 K \frac{Q^2}{D^4}$ , soit :

$$L_{eq} = \frac{KD}{f} \quad (2.37)$$

À l'aide de cette relation, l'équation 2.36 devient :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0,0827 f L_t \frac{Q^2}{D^5} \quad (2.38)$$

où  $L_t$  est la longueur totale  $L_t = L + \sum L_{eq}$

Cette notion de longueur équivalente ne fait pas que simplifier l'écriture des calculs mais permet aussi aux techniciens d'utiliser la même terminologie que celle utilisée par les fournisseurs d'équipements hydrauliques. En effet, ce sont les longueurs équivalentes, correspondant aux différents accessoires hydrauliques, qui sont fournies dans les catalogues et non les valeurs de  $K$ . Il faut cependant souligner que d'après la formule (2.37), la longueur équivalente dépend aussi du matériau et du diamètre de la conduite sur laquelle est installée la singularité.

Cette notion de longueur équivalente permet de mesurer l'importance des pertes de charge singulières par rapport aux pertes de charge linéaires moyennant le

$$\text{rapport } \frac{\sum L_{eq}}{L_t} \times 100\%.$$

## 2.7 Calcul des conduites en série et en parallèle

### 2.7.1 Conduites en série

Lorsque plusieurs conduites sont placées en série, le débit qui les traverse est le même et la perte totale de charge est la somme de toutes les pertes de charge (Fig. 2.17) :



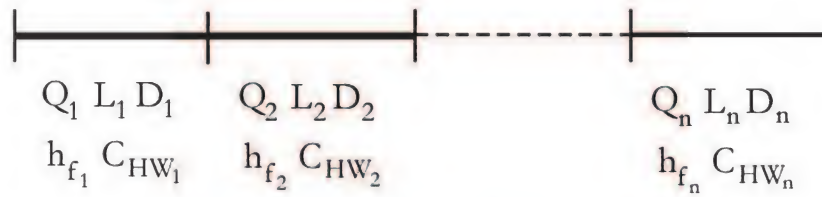


Fig. 2.17 Conduites en série

$$h_{f_{\text{total}}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + \dots + h_{f_n} \quad (2.39)$$

Le débit ne varie pas le long de la série :  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = Q$ .

Si on utilise la formule de Hazen-Williams pour estimer la perte de charge :

$$h_f = L \left( \frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}} \quad (2.40)$$

on peut poser :

$$K = L \left( \frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.41)$$

où  $K$  est le coefficient de débitance.

Imaginons que l'on veuille remplacer les  $n$  conduites par une conduite équivalente qui fait transiter le même débit que l'ensemble des conduites avec une perte de charge donnée. En utilisant (2.41) dans (2.40), puis (2.40) dans (2.39) pour chacune des conduites, on trouve :

$$K_{eq} Q_{eq}^{1,852} = K_1 Q_1^{1,852} + \dots + K_n Q_n^{1,852} \quad (2.42)$$

Comme les débits sont égaux, l'équation 2.42 devient :

$$K_{eq} = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.43)$$

En posant :

$$K_{eq} = L_{eq} \left( \frac{3,59}{(C_{HW})_{eq}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D_{eq}^{4,87}} \quad (2.44)$$

on peut calculer soit une longueur équivalente soit un diamètre équivalent ou un  $(C_{HW})_{eq}$ . Dans chacun des cas, on fixe deux paramètres et on calcule le troisième.

### Application 2.4

Considérons deux conduites en série dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure 2.18.

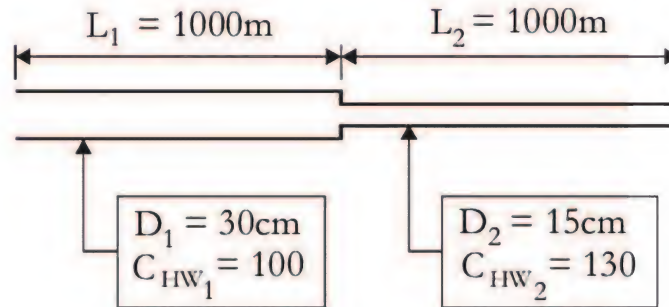


Fig. 2.18 Deux conduites en série

Il faut trouver le diamètre d'une conduite équivalente dont le coefficient de Hazen-Williams est  $C_{HW} = 140$  et la longueur est 2000m.

En utilisant l'équation (2.42) on trouve :

$$K_1 = 742,09 \quad K_2 = 13349 \quad K_{eq} = 14091$$

En utilisant (2.44) on trouve :

$$D_{eq} = 0,166\text{m}$$

On aurait pu aussi procéder de la manière suivante :

- on suppose une valeur de débit, par exemple  $Q = 0,01\text{m}^3/\text{s}$ ,
- on calcule la perte de charge  $h_{f1}$  et  $h_{f2}$  dans chacune des conduites, en l'occurrence :

$$h_{f1} = 0,146\text{m} \text{ et } h_{f2} = 2,64\text{m}$$

- la perte de charge totale dans la conduite équivalente est  $h_{fT} = 2,785\text{m}$ , le débit étant le même  $Q = 0,01\text{m}^3/\text{s}$ .

- en utilisant ces valeurs dans la formule de Hazen-Williams (2.26), on trouve :

$$D_{eq} = 0,166\text{m}$$

### 2.7.2 Conduites en parallèle

On dit que les conduites sont placées en parallèle lorsque leur point de bifurcation (1) et de confluence (2) sont communs, tel que montré schématiquement sur la figure 2.19.

Lorsque plusieurs conduites sont en parallèle, la perte de charge est la même pour toutes les conduites et le débit total est égal à la somme des débits.

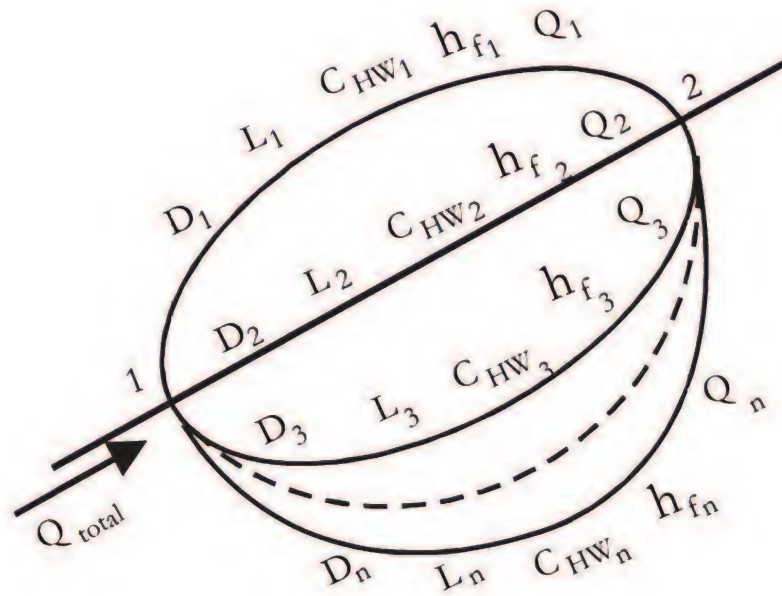


Fig. 2.19 Conduites en parallèle

On écrit alors :

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (2.45)$$

La conduite équivalente devra donc véhiculer un débit égal au débit total sous une perte de charge égale à la perte de charge unique. Pour une conduite  $i$  quelconque on peut écrire, avec les mêmes notations que pour les conduites en série :

$$Q_i = \left( \frac{h_{f_i}}{K_i} \right)^{1/1,852} \quad (2.46)$$



En utilisant (2.46) pour chacune des conduites dans (2.45) et en considérant que toutes les pertes de charge sont égales, on trouve :

$$\frac{1}{K_{eq}} = \left[ \left( \frac{1}{K_1} \right)^{1/1,852} + \left( \frac{1}{K_2} \right)^{1/1,852} + \dots + \left( \frac{1}{K_n} \right)^{1/1,852} \right]^{1,852} \quad (2.47)$$

ou encore :

$$K_{eq} = \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{K_i} \right)^{1/1,852} \right]^{1,852}} \quad (2.48)$$

De la même manière que pour les conduites en série, on pose :

$$K_{eq} = L_{eq} \left( \frac{3,59}{(C_{HW})_{eq}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D_{eq}^{4,87}} \quad (2.49)$$

On peut calculer soit une longueur équivalente soit un diamètre équivalent ou un  $(C_{HW})_{eq}$  en fixant chaque fois deux paramètres et en calculant le troisième. Cependant, c'est le diamètre équivalent qui est le plus souvent recherché. La formule (2.49) souligne l'avantage d'utiliser la formule de Hazen-Williams au lieu de celle de Darcy-Weissbach.

### ***Application 2.5***

Deux conduites placées en parallèle relient deux réservoirs, tel que schématisé par la figure 2.20.

Il faut démontrer que la perte de charge est la même dans les deux conduites et trouver le diamètre de la conduite équivalente ayant la même longueur et le même coefficient  $C_{HW}$  que les deux conduites.



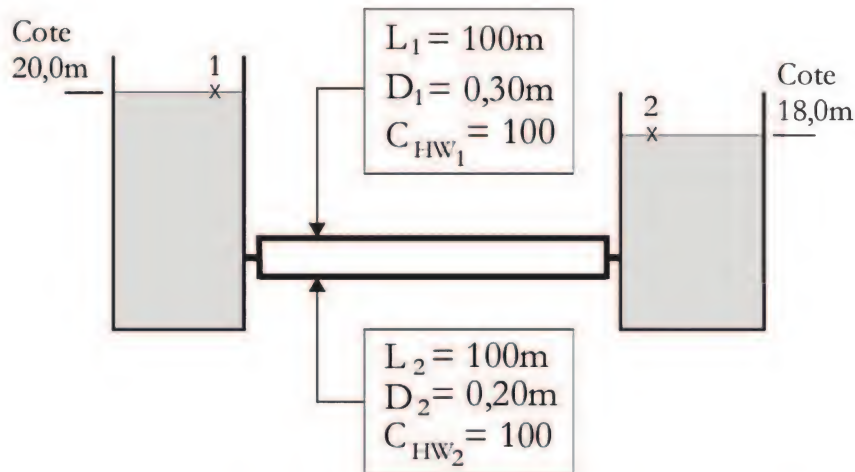


Fig. 2.20 Conduites parallèles entre deux réservoirs

Écrivons l'équation de Bernoulli pour une goutte d'eau qui est partie du point 1 de cote  $Z_1 = 20\text{m}$ , pour rejoindre le point 2 de cote  $Z_2 = 18\text{m}$ , en passant par la conduite de diamètre  $D_1$  :

$$Z_1 = Z_2 + h_f$$

soit

$$h_f = Z_1 - Z_2 = 2,0\text{m} = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{hw_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (a)$$

Écrivons la même équation pour une autre goutte d'eau qui a emprunté la conduite de diamètre  $D_2$  :

$$h_f = 2,0\text{m} = L_2 \left( \frac{3,59}{C_{HW_2}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (b)$$

En comparant les deux équations (a) et (b), il est clair que  $h_{f1} = h_{f2}$ .

Par ailleurs, les débits  $Q_1$  et  $Q_2$  sont a priori différents et obéissent à la relation  $Q_T = Q_1 + Q_2$ ,  $Q_T$  étant le débit total.

Pour trouver le diamètre de la conduite équivalente, on calcule  $K_1$  et  $K_2$  pour les deux conduites (2.42) :

$$K_1 = 74,21$$

$$K_2 = 534,6$$

La valeur du coefficient  $K$  équivalent se calcule par (2.48) :

$$K_{eq} = 42,90$$

Finalement l'équation (2.49) fournit le diamètre équivalent :

$$D_{eq} = 0,335\text{m}$$

On aurait pu procéder d'une manière plus rapide en calculant les débits  $Q_1$  et  $Q_2$  par l'utilisation directe de l'équation de Hazen-Williams (2.26) :

$$Q_1 = 0,1421\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0,0489\text{m}^3/\text{s}$$

L'utilisation du débit total dans la conduite équivalente avec la même perte de charge de 2,0m donne directement le diamètre équivalent  $D_{eq} = 0,335\text{m}$ .

## 2.8 Courbe caractéristique d'une conduite (C.C.C.)

La courbe caractéristique d'une conduite donnée est la représentation graphique de la variation de la perte de charge entre deux extrémités de cette conduite en fonction du débit qui la traverse.

La perte de charge se calcule par la relation (2.20). Normalement, deux points ciblés, en plus de l'origine, suffisent pour tracer cette courbe (figure 2.21)

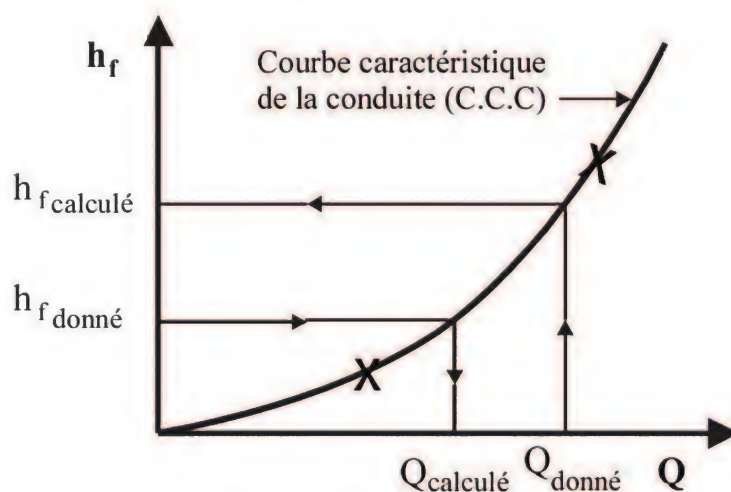


Fig. 2.21 Courbe caractéristique d'une conduite



Une telle courbe caractéristique a plusieurs utilités :

- Une fois la courbe tracée, il est possible de calculer la perte de charge  $h_f$  pour n'importe quelle valeur du débit ou l'inverse. Cet usage devient plus pertinent quand le système comporte plusieurs conduites en série et en parallèle.
- La courbe caractéristique devient incontournable quand il faut trouver le point de fonctionnement d'une pompe. Comme il est démontré au chapitre 3, ceci est fait en superposant la courbe caractéristique de la conduite à la courbe caractéristique de la pompe.

## 2.9 Courbe caractéristique de conduites en série

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en série (figure 2.17), on doit appliquer l'équation (2.36) et tenir compte du fait que  $Q_T = Q_1 = Q_2 \dots = Q_n$  et  $h_{fT} = h_{f1} + h_{f2} + \dots + h_{fn}$ . La courbe caractéristique résultante est montrée sur la figure 2.22.

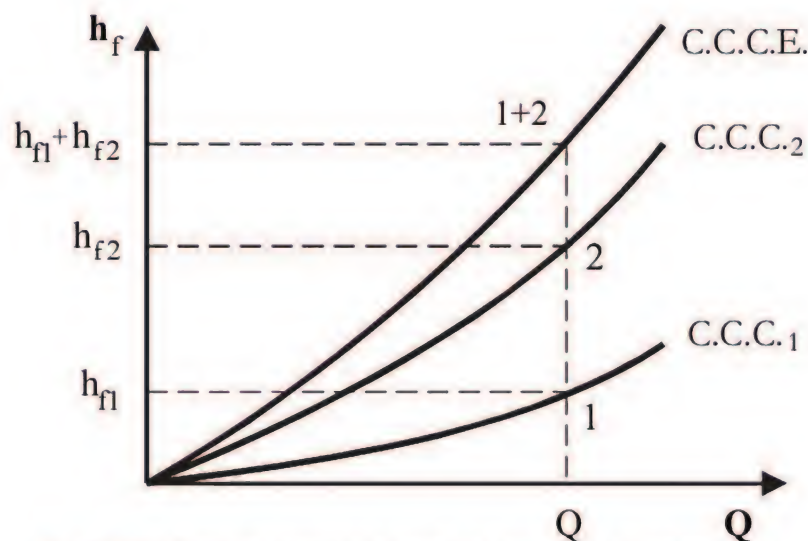


Fig. 2.22 Courbe caractéristique de deux conduites en série

## 2.10 Courbe caractéristique de conduites en parallèle

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en parallèle (figure 2.19), on utilise l'équation (2.42) en tenant compte du fait que les pertes de charge sont égales :

$$h_{fT} = h_{f1} = h_{f2} \dots = h_{fn} \text{ et } Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$



La courbe caractéristique résultante est montrée sur la figure 2.23.

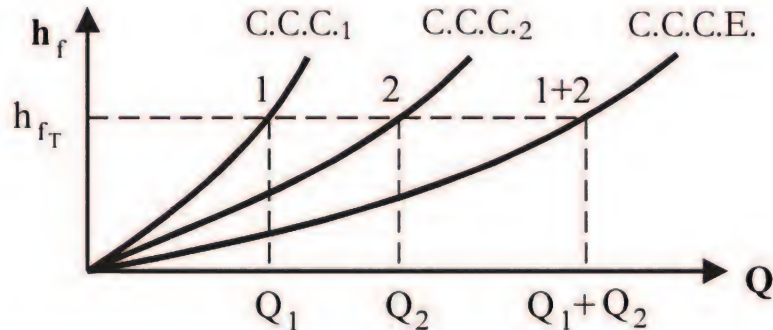


Fig. 2.23 Courbe caractéristique de deux conduites en parallèle

## 2.11 Problème des trois réservoirs

Ce problème illustre une situation courante qui se présente dans les systèmes de distribution d'eau potable. La plupart des municipalités possèdent un réservoir d'accumulation d'eau principal **A** (figure 2.24). Quand la municipalité est assez étendue, elle possède aussi un réservoir secondaire de soutien **B**. Ce réservoir se remplit durant la nuit, aux moments de faible demande à partir du réservoir A et se vide le jour aux moments de forte demande, quand la pression diminue dans le réseau. Le niveau du troisième réservoir **C** représente la pression résiduelle dans le réseau. Le débit acheminé vers le troisième réservoir représente le débit de consommation.

On est intéressé à connaître les débits  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  dans les trois conduites, le sens de l'écoulement dans la conduite 2 étant a priori inconnu.

À titre d'exemple, les données du problème sont :

$Z_1 = 60\text{m}$	$D_1 = 0,90\text{m}$	$L_1 = 10000\text{m}$	$C_{HW1} = 100$
$Z_2 = 30\text{m}$	$D_2 = 0,60\text{m}$	$L_2 = 10000\text{m}$	$C_{HW2} = 100$
$Z_3 = 20\text{m}$	$D_3 = 0,90\text{m}$	$L_3 = 10000\text{m}$	$C_{HW3} = 100$

En dénotant par I le point de jonction entre les trois conduites, l'écoulement se fait donc soit de I vers B ou l'inverse, au gré de la demande.

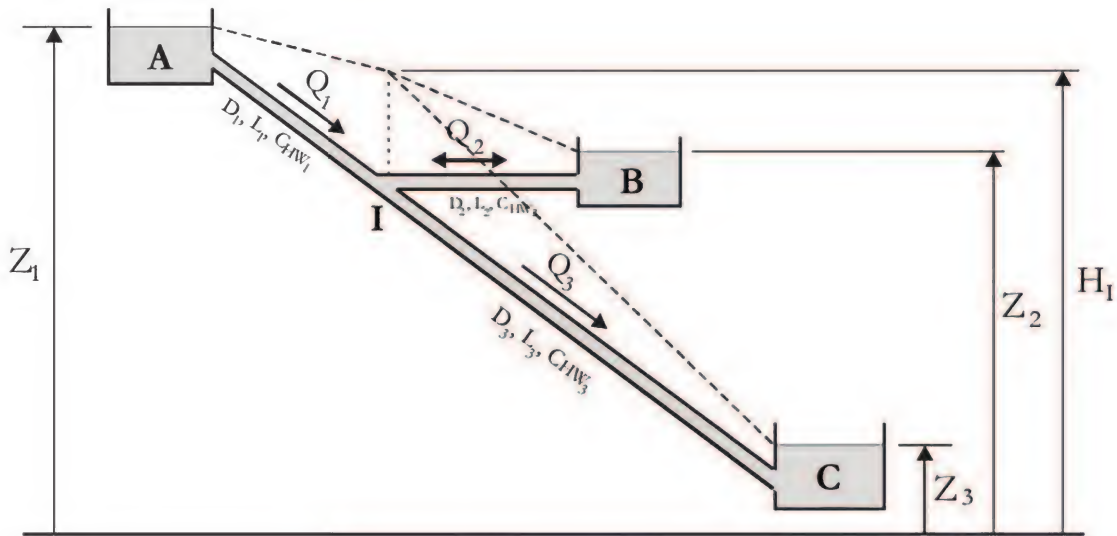


Fig. 2.24 Problème des trois réservoirs

L'application de l'équation de Bernoulli entre la surface libre des trois réservoirs et le point **I** où l'énergie totale est désignée par  $H_I$ , donne respectivement :

$$Z_1 - H_I = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (2.50)$$

$$H_I - Z_2 = L_2 \left( \frac{3,59}{C_{HW_2}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (2.51)$$

$$H_I - Z_3 = L_3 \left( \frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.52)$$

Dans ces équations, on a supposé que l'écoulement se fait de **I** vers **B**. Dans le cas contraire, il faut remplacer le premier membre de l'équation (2.51) par son opposé.

On est en présence d'un système de trois équations avec quatre inconnues :  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  et  $H_I$ . Afin d'être capable de résoudre ce système, il faut ajouter une quatrième équation qui traduit la conservation de la masse. En supposant que l'écoulement se fait de **I** vers **B** :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (2.53)$$

ou dans le cas où l'écoulement se fait de **B** vers **I** :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (2.54)$$

En additionnant membre par membre les équations (2.50) et (2.51) on obtient :

$$Z_1 - Z_2 = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left( \frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (2.55)$$

En additionnant membre par membre les équations (2.50) et (2.52) on obtient d'une manière similaire :

$$Z_1 - Z_3 = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_3 \left( \frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.56)$$

Le système d'équations (2.53) ou (2.54) avec (2.55) et (2.56) peut être résolu par une méthode de substitution pour trouver les valeurs de  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ .

Revenons à la détermination du sens de l'écoulement dans la conduite 2 pour choisir entre les équations (2.53) et (2.54). On pose dès le départ l'équation suivante :

$$H_1 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = Z_2 = 30\text{m} \quad (2.57)$$

Ceci signifie que l'énergie totale  $H_1$  au point de jonction **I** égale exactement la cote dans le réservoir **B**. Dans ce cas le débit  $Q_2$  est nul et le système d'équations devient :

$$Z_1 - Z_2 = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (2.58)$$

$$Z_1 - Z_3 = L_1 \left( \frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_3 \left( \frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.59)$$

$$Q_1 = Q_3 \quad (2.60)$$



L'équation (2.58) nous permet de calculer  $Q_1$ . Dans le cas présent :

$$Q_1 = 0,917 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'équation (2.59) nous permet de calculer  $Q_3$ . Dans le cas présent :

$$Q_3 = 0,506 \text{ m}^3/\text{s}$$

Si  $Q_1 = Q_3$ , autrement dit si l'équation (2.60) est vérifiée, l'hypothèse posée dans l'équation (2.57) est valable et le problème est résolu.

Si  $Q_1 < Q_3$ , ceci signifie que l'énergie  $H_1$  est inférieure à la valeur supposée. Dans le cas présent, l'énergie  $H_1$  est supérieure à  $Z_2 = 30\text{m}$  et l'écoulement se fait bien de **I** vers **B**. Le système d'équations (2.53), (2.55) et (2.56) posé est donc approprié. Sa résolution permet d'obtenir les débits cherchés.

Une autre approche heuristique consiste à chercher l'énergie  $H_1$  par essais-erreurs. On peut poser a priori  $H_1 = 31\text{m}, 32\text{m} \dots$  et vérifier chaque fois si  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ . Quand cette condition est satisfaite, la solution du problème est obtenue. On trouve ainsi  $H_1 = 36,5\text{m}$ . Les débits, les vitesses et les pertes de charge sont fournis au tableau 2.9

	Débit (m <sup>3</sup> /s)	Vitesse (m/s)	$h_f$ (m)
Conduite <b>AI</b>	0,8028	1,26	23,47
Conduite <b>IB</b>	0,1385	0,49	6,53
Conduite <b>IC</b>	0,6643	1,04	16,53

Tableau 2.9

## RÉSUMÉ

- 1- Pour un fluide incompressible en écoulement permanent sans dissipation d'énergie, l'équation de Bernoulli s'écrit le long d'une trajectoire entre deux points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

- 2- L'équation de Bernoulli généralisée qui prend en compte la dissipation d'énergie et la présence de pompes ( $H_p$ ) et de turbines ( $H_T$ ) s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f + \sum h_s + H_T$$

- 3- La perte de charge  $h_f$  se calcule par la formule de Darcy-Weissbach ou la formule de Hazen-Williams :

$$h_f = 0,0827 f L \frac{Q^2}{D^5} \qquad h_f = 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

- 4- Le coefficient de frottement  $f$  peut se calculer numériquement par

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots \text{en régime turbulent}$$

$$f = 64/Re \dots\dots\dots \text{en régime laminaire}$$

ou être obtenu graphiquement par le diagramme de Moody.

- 5- La perte charge singulière  $h_s$  se calcule par la relation  $h_s = K V^2/2g$  où la valeur de  $K$  dépend du type de singularité.
- 6- Le calcul des conduites en série se fait en appliquant la règle suivante : le débit qui passe par les conduites reste le même, les pertes de charge s'additionnent.
- 7- Lorsque des conduites sont placées en parallèle, la perte de charge est la même dans toutes les conduites. Le débit total est la somme des débits passant par chacune des conduites.

## EXERCICES

### Exercice 2.1

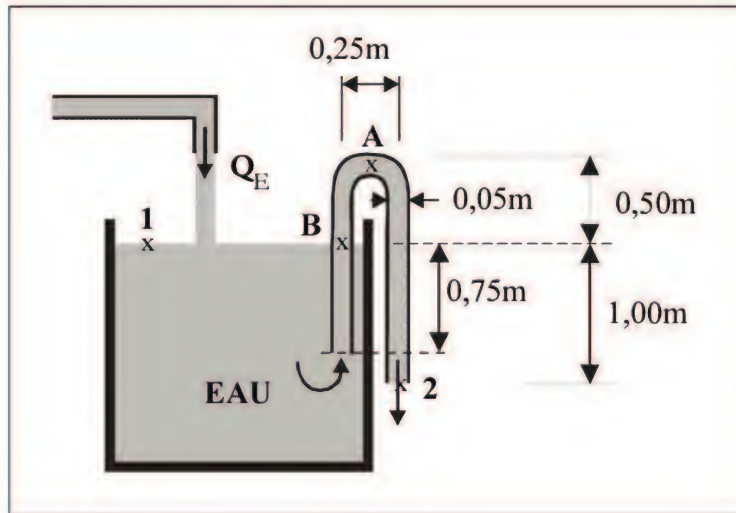


Fig. 2.25

On draine l'eau d'un réservoir à l'aide d'un siphon. Le tube a un diamètre de 5 cm. Les longueurs et les cotes du tube sont indiquées sur la figure 2.25.

Le coefficient de perte de charge singulière à l'entrée du siphon est de 0,50.

Dans chacun des deux coudes, le coefficient de perte de charge singulière est de 0,75.

Le coefficient de frottement  $f$  a été estimé à 0,020.

- Il faut calculer le débit d'entrée  $Q_E$  nécessaire pour maintenir le niveau du réservoir constant.
- Il faut calculer la pression au sommet A du siphon.
- Il faut calculer la pression dans le tube au point B situé à la même cote que l'eau du réservoir.
- Il faut calculer l'erreur qui serait commise en a), b) et c) si on faisait l'hypothèse que les pertes de charge sont négligeables. Cette hypothèse paraît-elle raisonnable?

### Exercice 2.2

Une conduite d'aqueduc en fonte ductile ( $\epsilon = 0,16\text{ mm}$ ) de diamètre 205 mm transporte un débit de 33 litres/seconde (eau à  $5^\circ\text{C}$ ).

- Quelle est la perte de charge sur 1000 m de conduite?
- Quel est le coefficient de Hazen-Williams pour cette conduite?

### Exercice 2.3

Un réservoir d'accumulation d'eau (à  $15^\circ\text{C}$ ) alimente un réseau de distribution à l'aide d'une conduite maîtresse ayant un diamètre de 600 mm (figure 2.26).

Cette conduite neuve faite en fonte ( $\epsilon = 0,12\text{ mm}$ ) a une longueur  $L = 2000\text{ m}$ .

La cote piézométrique mesurée au point B est de 18,0 m. Le niveau du plan d'eau dans le réservoir est  $H = 20,0\text{ m}$ . On considère un coefficient de perte de charge singulière  $K = 0,5$  à l'entrée de la conduite.

- Il faut calculer le débit d'écoulement.



2) Il faut tracer la ligne piézométrique et la ligne d'énergie.

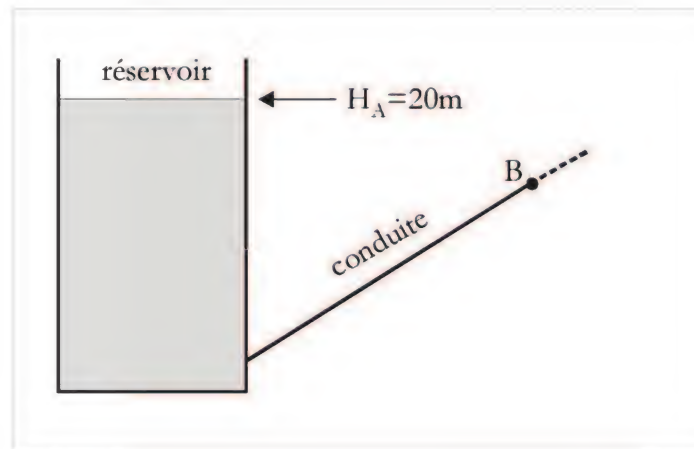
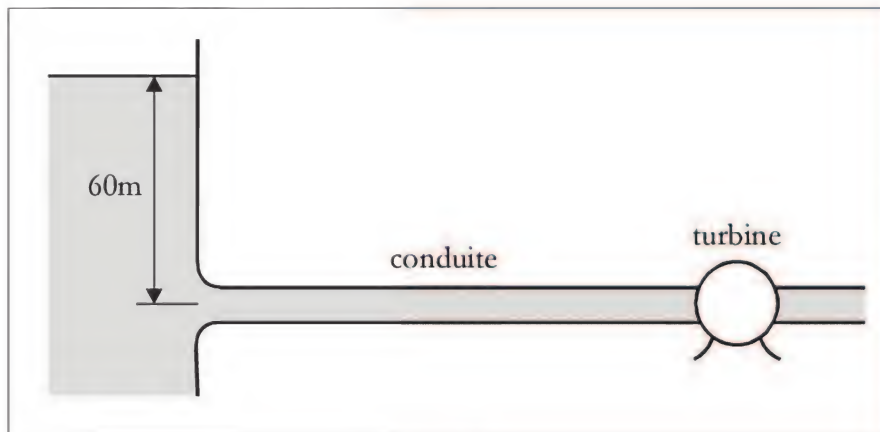


Fig. 2.26

#### Exercice 2.4



Le débit turbiné dans une centrale hydroélectrique est de  $Q_T = 1,0 \text{ m}^3/\text{s}$  avec une hauteur de chute de 60,0m (figure 2.27). La conduite forcée faite en acier forgé ( $\epsilon = 0,1 \text{ mm}$ ) a un diamètre de 300mm et une longueur de 50m. La température de l'eau est 20° C.

Fig. 2.27

En se basant sur un prix de 4 cents par kWh et un rendement global de 70%,

- 1) Il faut calculer les recettes annuelles de l'énergie vendue.
- 2) Il faut tracer la ligne piézométrique et la ligne d'énergie.

#### Exercice 2.5

On considère l'écoulement dans une conduite de diamètre variable schématisé par la figure 2.28. Il faut déterminer les diamètres des conduites AB, BC, CD et DE si l'on tolère une perte de charge de 3,0m par 1000m pour toutes les conduites. On néglige les pertes de charge singulières.

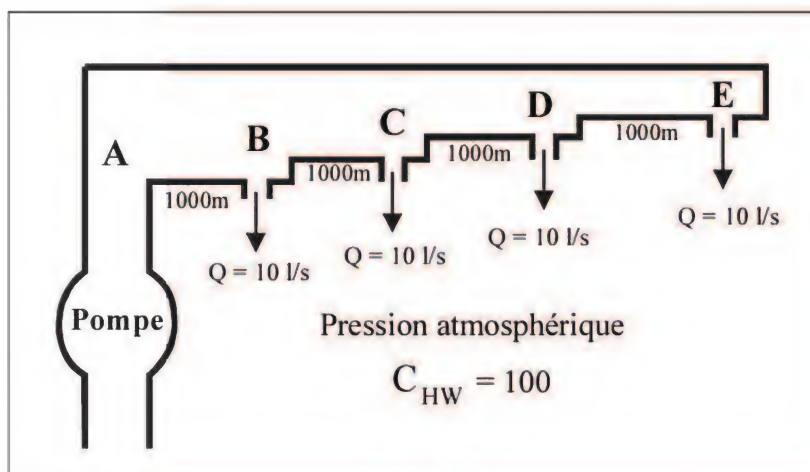


Fig. 2.28

### Exercice 2.6

On considère l'écoulement de l'eau à  $15^\circ\text{C}$  dans le système schématisé par la figure 2.29. Le débit d'écoulement est  $Q = 25 \text{ litres/seconde}$ . La conduite a un diamètre de 150mm et est faite en fonte ( $C_{fW} = 130$ ). On suppose que la prise d'eau est bien profilée ( $K = 0,04$ ). Les coefficients  $K$  pour les coudes sont égaux à 0,75.

Il faut calculer la puissance hydraulique fournie par la pompe.

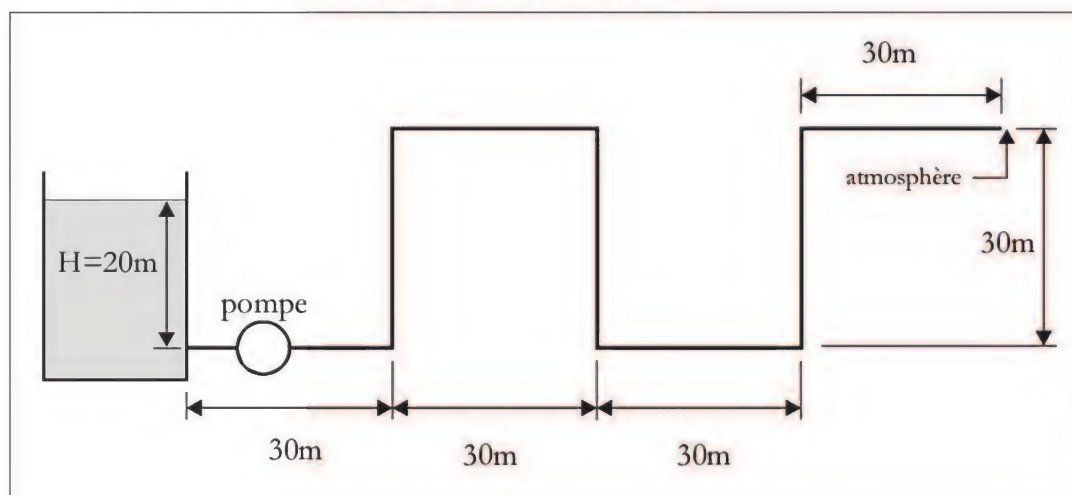


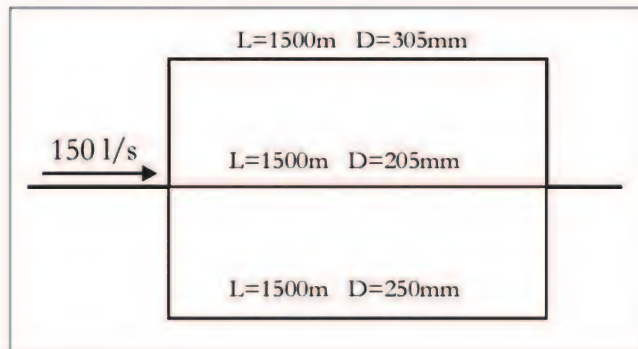
Fig. 2.29

### Exercice 2.7

On pense remplacer deux tuyaux de 610mm placés en parallèle, par une seule conduite équivalente.

Il faut calculer le diamètre de cette conduite équivalente en supposant une longueur  $L = 100\text{m}$  et  $C_{fW} = 100$  pour toutes les conduites.

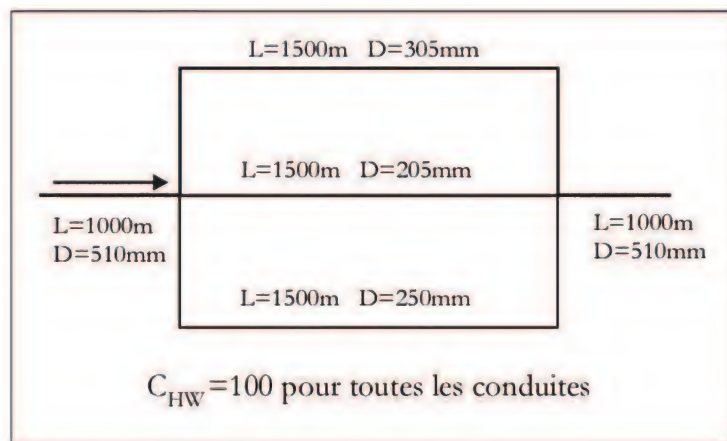
## Exercice 2.8



Trois conduites de distribution d'eau sont placées en parallèle (figure 2.30). Il faut calculer le débit dans chacune des conduites. Le coefficient  $C_{HW} = 100$  pour toutes les conduites.

Fig. 2.30

## Exercice 2.9



Il faut calculer le diamètre de la conduite équivalente de cinq conduites dans le système schématisé par la figure 2.31.

La conduite équivalente doit avoir une longueur de 3500m et un coefficient  $C_{HW}$  de 100.

Fig. 2.31

## Exercice 2.10

On considère le système de trois réservoirs schématisé par la figure 2.32

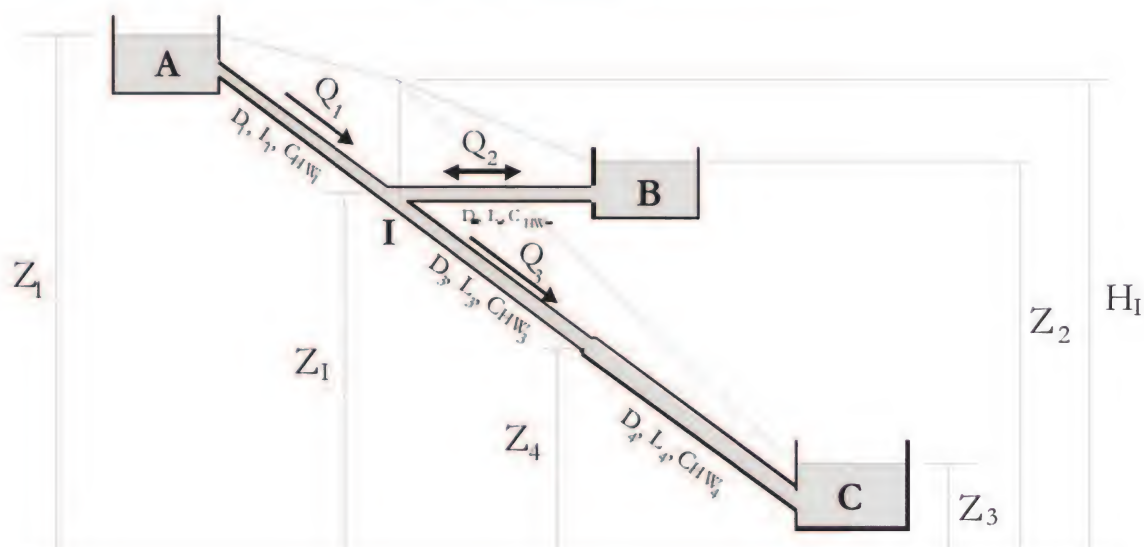


Fig. 2.32



Les données sont :

$Z_1=60\text{m}$	$D_1=0,90\text{m}$	$L_1=10000\text{m}$	$C_{HW1}=100$
$Z_2=40\text{m}$	$D_2=0,60\text{m}$	$L_2=10000\text{m}$	$C_{HW2}=100$
$Z_3=20\text{m}$	$D_3=0,90\text{m}$	$L_3=5000\text{m}$	$C_{HW3}=100$
$Z_4=25\text{m}$	$D_4=1,00\text{m}$	$L_4=5000\text{m}$	$C_{HW4}=100$

Il faut trouver les débits dans toutes les conduites.

### Exercice 2.11

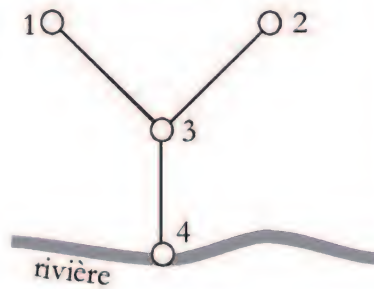


Fig. 2.33

Soit le système de drainage pluvial schématisé par la figure 2.33

L'exutoire du réseau (nœud 4) est situé dans un cours d'eau où le niveau en temps d'orage atteint 27,0m. Par ailleurs, le tableau ci-joint fournit les débits de pointe en temps d'orage, les diamètres, les longueurs et toutes les cotes pertinentes.

Le coefficient de Hazen-Williams est  $C_{HW} = 100$  pour toutes les conduites.

conduite	Débit $\text{m}^3/\text{s}$	Diamètre (m)	Cote au sol (m)		Cote du radier (m)		Longueur (m)
			amont	aval	amont	aval	
1 - 3	6,0	1,37	30,5	29,0	26,15	26,00	100,0
2 - 3	4,0	0,915	30,5	29,0	25,90	25,50	100,0
3 - 4	15,0	2,44	29,0	28,5	25,50	24,25	500,0

Il faut tracer la ligne piézométrique selon les chemins 1-3-4 et 2-3-4. Il faut indiquer les endroits de mise en charge et les endroits d'inondation.

### Exercice 2.12

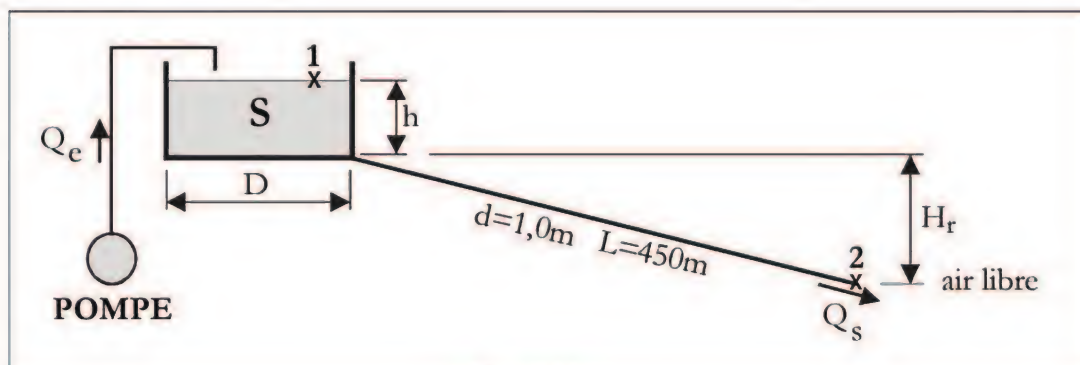


Fig. 2.34

Le but de cet exercice est de déterminer les temps de vidange et de remplissage d'un réservoir en prenant en considération les pertes de charge (figure 2.34).

Le réservoir est de section circulaire de diamètre  $D = 100,0\text{m}$ . La profondeur initiale de l'eau dans le réservoir est  $h_0 = 7,0\text{m}$ .

La conduite de vidange possède un diamètre  $d = 1,0\text{m}$  et une longueur totale  $L_t = 500,0\text{m}$  (incluant la longueur équivalente).

La dénivelée entre le radier du réservoir et la sortie de la conduite est  $H_r = 9,0\text{m}$ .

On suppose que le coefficient de frottement  $f$  de l'équation de Darcy est constant et égal à une valeur moyenne  $f = 0,02$ .

- 1) Écrire l'équation de continuité instantanée qui relie le volume du réservoir  $S$  aux débits d'entrée  $Q_e$  et de sortie  $Q_s$ .
- 2) Trouver l'expression littérale de la vitesse de sortie  $V_s$  au point 2 en fonction des variables  $h$ ,  $H_r$ ,  $f$ ,  $L_t$ ,  $d$  et  $g$ .
- 3) Exprimer le débit de vidange  $Q_s$  en fonction des variables  $h$ ,  $H_r$ ,  $f$ ,  $L_t$ ,  $d$  et  $g$ .
- 4) Réécrire l'équation de continuité trouvée en 1) avec  $Q_e = 0$  et en remplaçant  $Q_s$  par sa valeur trouvée en 3).
- 5) Faire un changement de variable  $H = h + H_r$  dans l'équation trouvée en 4) et trouver l'équation différentielle avec la nouvelle fonction  $H$ . On remarquera dans ce cas que
 
$$\frac{dh}{dt} = \frac{dH}{dt}$$
- 6) Intégrer l'équation trouvée en 5) pour trouver l'expression littérale du temps de vidange  $T_v$  en fonction de  $L_t$ ,  $d$ ,  $D$ ,  $h_0$ ,  $H_r$ ,  $f$  et  $g$ .
- 7) Trouver la valeur numérique de ce temps de vidange  $T_v$  en utilisant les données numériques de l'exercice.
- 8) Sans reprendre toutes les étapes de calcul, calculer le temps de vidange  $T_v$  à partir de l'expression trouvée en 6) en négligeant cette fois les pertes de charge.
- 9) En supposant un débit de remplissage  $Q_e$  et d'alimentation des consommateurs  $Q_s$  constants, calculer le temps de remplissage  $T_r$  en fonction de  $D$ ,  $Q_e$ ,  $Q_s$  et  $\Delta h$ , où  $\Delta h$  est la variation du niveau dans le réservoir.
- 10) Calculer le temps de remplissage  $T_r$  si  $Q_e = 5,0\text{m}^3/\text{s}$ ,  $Q_s = 1,0\text{m}^3/\text{s}$  et  $\Delta h = 7,0\text{m}$ .

## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 2

Brière, F. (1997), *Distribution et collecte des eaux*, Montréal, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal.

Carlier, M. (1972), *Hydraulique générale et appliquée*, Paris, Eyrolles.

Lencastre, A. (1999), *Hydraulique générale*, 2<sup>e</sup> éd., Paris, Eyrolles.



## SYMBOLES DU CHAPITRE 2

$A$	: section d'écoulement, surface
$C_{HW}$	: coefficient de Hazen-Williams
$D$	: diamètre
$f$	: coefficient de frottement
$F$	: force
$g$	: accélération due à la gravité
$h_f$	: perte de charge par frottement
$h_s$	: perte de charge singulière
$H$	: hauteur de charge
$H_P$	: charge produite par une pompe
$H_T$	: charge consommée par une turbine
$K$	: constante de perte de charge, coefficient de débitance
$L$	: longueur
$m$	: constante de perte de charge
$n$	: constante de perte de charge, coordonnée curviligne
$P$	: pression
$P_p$	: puissance d'une pompe
$P_T$	: puissance absorbée par une turbine
$Q$	: débit
$r$	: rayon de courbure
$Re$	: nombre de Reynolds
$S$	: volume
$t$	: temps
$v$	: vitesse d'écoulement
$V$	: vitesse moyenne d'écoulement
$x$	: direction d'écoulement, abscisse
$y$	: direction, ordonnée
$Z$	: cote
$\alpha$	: coefficient de correction, angle
$\varepsilon$	: hauteur moyenne des aspérités
$\eta$	: viscosité dynamique
$\nu$	: viscosité cinématique
$\rho$	: masse volumique du liquide
$\tau$	: contrainte de cisaillement

# Chapitre 3

## *Les pompes*

### Objectifs

- 1- Définir les différents types de pompes et connaître les contextes de leur utilisation.
- 2- Connaître les différentes courbes caractéristiques d'une pompe.
- 3- Savoir choisir la pompe appropriée selon la vitesse spécifique.
- 4- Connaître les règles de similitude lors d'un changement de diamètre de la roue de la pompe ou de la vitesse de rotation du moteur.
- 5- Trouver le point de fonctionnement d'une pompe qui définit le débit et la hauteur manométrique d'opération.
- 6- Savoir ajuster le point de fonctionnement pour obtenir les conditions idéales du débit visé.
- 7- Poser le problème de la cavitation dans les pompes centrifuges et définir les conditions de fonctionnement pour l'éviter.
- 8- Définir les différents critères d'acceptation du point de fonctionnement.
- 9- Trouver la pompe équivalente à des pompes placées en série et en parallèle.
- 10- Définir les principes de choix des pompes pour satisfaire des conditions de débit et de hauteur d'élévation.

### 3.1 Considérations économiques

Les pompes sont utilisées dans les domaines de la distribution et de la collecte des eaux, de l'irrigation, de la lutte contre les incendies et les inondations.

D'une manière générale, on utilise les pompes dans une des trois situations suivantes :

- 1) La gravité est défavorable.
- 2) La gravité est favorable mais insuffisante pour fournir le débit nécessaire avec un diamètre économique ou raisonnable.
- 3) La pression locale est insuffisante.

Le premier cas est le plus courant. Il correspond, par exemple, à la situation où on désire pomper l'eau d'un puits, d'un lac ou d'une rivière pour la traiter et la stocker dans des réservoirs d'équilibre ou pour la distribuer directement aux consommateurs. Dans ce cas, les pompes sont absolument nécessaires. La situation est similaire pour les eaux usées quand les excavations sont trop profondes.

Le deuxième cas est plus nuancé. L'eau peut théoriquement s'écouler d'elle-même gravitairement du point de départ au point d'arrivée sans apport extérieur d'énergie. Cependant, pour des considérations économiques, on envisage quand même l'usage de pompes. En supposant que les points de départ et d'arrivée sont situés à la surface libre des plans d'eau au repos, l'équation (2.26) permet de déterminer le diamètre  $D$  nécessaire pour véhiculer gravitairement le débit  $Q$ , sans usage de pompes, en la réécrivant comme suit :

$$D = \left[ \frac{10,675L}{\Delta H} \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \right]^{1/4,87} \quad (3.1)$$

où  $\Delta H$  est la dénivellation entre les deux surfaces libres.

Cette équation montre que plus cette dénivellation  $\Delta H$  est faible, plus grand sera le diamètre nécessaire pour véhiculer le débit  $Q$ . Par conséquent, si  $\Delta H$  est trop faible, on peut obtenir une valeur démesurée du diamètre  $D$  ou une valeur incompatible avec le lieu de pose et les pratiques locales.

Prenons à titre d'exemple une dénivellation  $\Delta H = 0,5\text{m}$  entre la source et le réservoir. Un débit  $Q = 5,0\text{m}^3/\text{s}$  doit être véhiculé par une conduite en béton dont la longueur est de  $5,0\text{km}$  et le coefficient de Hazen-Williams  $C_{HW} = 140$ .



Il faut trouver le diamètre d'une telle conduite. La formule 3.1 permet de calculer ce diamètre :  $D = 3,21\text{m}$ . Le coût d'une telle conduite, dont le diamètre n'est pas standard et qui est déployée sur 5,0km, peut être excessif.

L'ajout d'une pompe dans le système introduit une hauteur manométrique  $H_p$  qui permet de réduire le diamètre  $D$  en gardant le même débit  $Q$ . La valeur de cette hauteur manométrique peut être obtenue par application de l'équation (2.12) :

$$H_p = 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} - \Delta H \quad (3.2)$$

Cette relation montre clairement que la hauteur manométrique  $H_p$  varie dans le sens inverse du diamètre  $D$ . Dans l'exemple traité précédemment, l'ajout d'une pompe ayant une hauteur manométrique  $H_p = 5,0\text{m}$  permet de fournir le même débit avec un diamètre  $D = 2,0\text{m}$  au lieu de  $D = 3,21\text{m}$  en écoulement gravitaire. Le coût d'acquisition et d'exploitation de la station de pompage sera donc décroissant avec le diamètre de la conduite. Par ailleurs, le coût de la conduite est croissant avec son diamètre. La figure 3.1 montre qu'il existe un diamètre économique qui correspond à un équilibre judicieux entre l'investissement dans la conduite et dans la station de pompage.

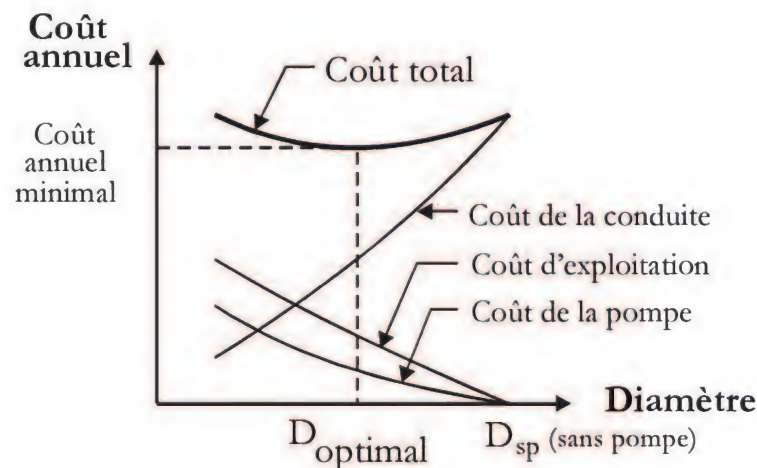


Fig. 3.1 Analyse des coûts

*Remarques :*

- 1) Le choix du diamètre n'est pas dicté seulement par des considérations économiques. La vitesse d'écoulement qui résulte d'un choix donné de diamètre se calcule par :

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad (3.3)$$

Cette valeur doit respecter les contraintes  $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$ .

Une vitesse d'écoulement trop faible favorise les dépôts et la formation de poches d'air aux points hauts. Une vitesse d'écoulement trop élevée peut causer l'abrasion du matériau et augmenter le risque de bris lors du coup de bélier.

- 2) Les considérations qui viennent d'être développées pour le choix du diamètre économique sont valables aussi dans le premier cas où la gravité est défavorable.

Finalement, le dernier cas correspond à l'utilisation locale de pompes de surpression pour lutter contre les incendies ou maintenir des pressions adéquates dans un système de distribution d'eau potable d'un secteur surélevé d'une ville.

### 3.2 Description d'une pompe centrifuge

Une pompe centrifuge est composée d'un rotor (roue à aubes) qui tourne à l'intérieur d'une partie fixe appelée volute ou bache spirale (figure 3.2).

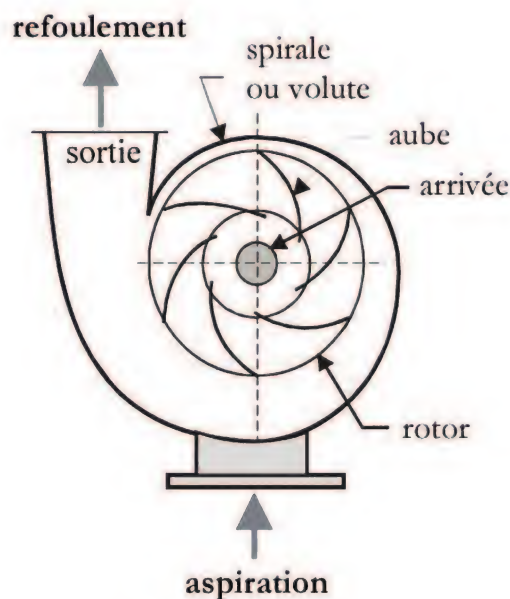


Fig. 3.2 Pompe centrifuge

Les pompes peuvent être à écoulement radial, axial ou mixte. Dans les pompes à écoulement radial, l'eau pénètre axialement par le centre et sort radialement par la périphérie (figure 3.3, a et b). L'eau qui pénètre par la conduite d'aspiration au centre de ce rotor est ensuite entraînée par les aubes et poussée vers l'extérieur par la force centrifuge. Dans ces pompes, l'énergie cinétique est transformée en énergie de pression à la sortie de la pompe. C'est justement cette pression qui



provoque le mouvement ascendant de l'eau. Ces pompes sont indiquées surtout pour les grandes hauteurs d'élévation. Il y a deux types d'impulseur dans les pompes radiales : l'impulseur à aspiration simple et l'impulseur à aspiration double (figure 3.4).

Dans les pompes à écoulement axial, dites « pompes à hélice », l'écoulement est quasi axial à l'entrée et à la sortie (figure 3.3, f). La pression est développée principalement par aspiration. Ces pompes sont indiquées pour les faibles hauteurs d'élévation.

Les pompes mixtes, ou hélico-centrifuges, constituent un mélange des deux principes précédents (figure 3.3, c, d et e). Le liquide arrive axialement et sort dans une direction intermédiaire entre les directions axiale et radiale. Ces pompes fonctionnent grâce à la force centrifuge et à l'action d'aspiration des aubes. Elles sont indiquées pour les hauteurs moyennes d'aspiration.

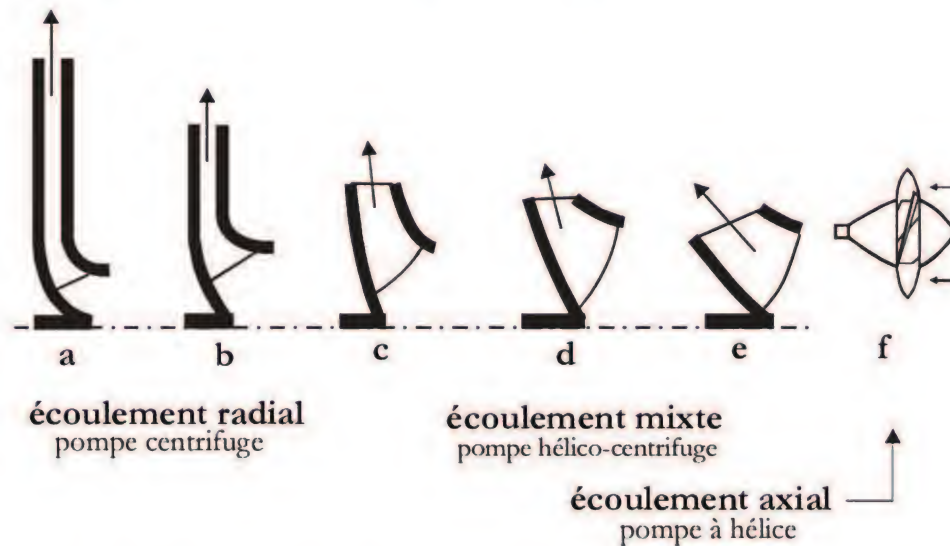


Fig. 3.3 Orientation de l'écoulement dans différents types de pompes

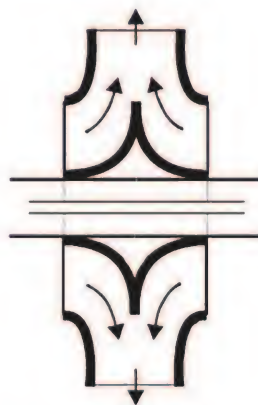


Fig. 3.4 Roue à aspiration double



### 3.3 Nomenclature

Les termes suivants sont utilisés pour désigner les différents types de charge associés aux pompes (voir la figure 3.5) :

- $H_g$  : la hauteur géométrique totale d'élévation,
- $h_a$  : la hauteur géométrique d'aspiration,
- $h_r$  : la hauteur géométrique de refoulement,
- $h_{ft,a}$  : la perte de charge dans la conduite d'aspiration,
- $h_{ft,r}$  : la perte de charge dans la conduite de refoulement,
- $H_a$  : la hauteur totale à l'aspiration,
- $H_r$  : la hauteur totale au refoulement,
- $H_p$  : la hauteur manométrique développée par la pompe.

La perte de charge totale  $h_{fT} = h_{ft,a} + h_{ft,r}$   
 La hauteur géométrique totale  $H_g = h_a + h_r$ .  
 La hauteur manométrique  $H_p = H_g + h_{fT}$

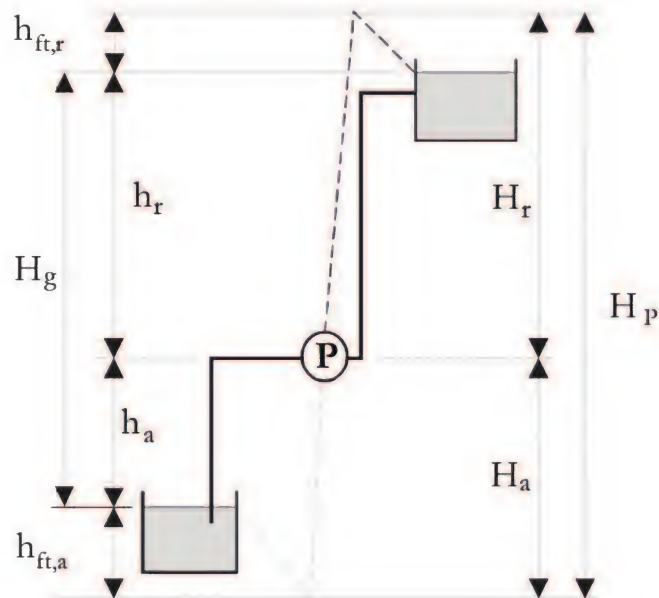


Fig. 3.5 Schéma de nomenclature

### 3.4 Courbes caractéristiques d'une pompe

Pour employer une pompe centrifuge d'une manière optimale, il faut connaître ses courbes caractéristiques qui illustrent entre autres la variation de la hauteur manométrique et du rendement en fonction du débit.

#### 3.4.1 Courbe caractéristique Q-H<sub>p</sub>

La hauteur manométrique développée par une pompe centrifuge diminue généralement en fonction du débit pompé. Cette courbe se présente sous la forme montrée à la figure 3.6.

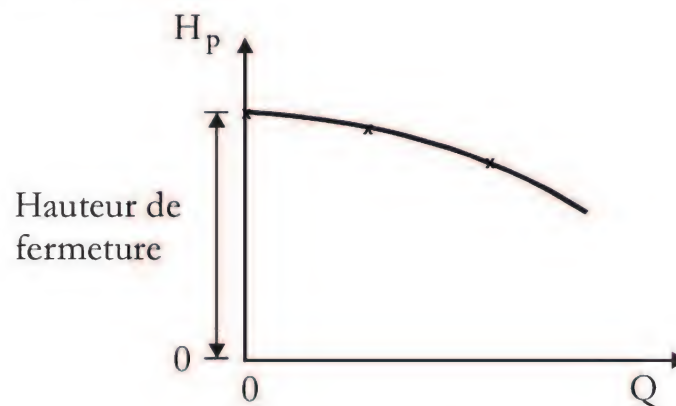


Fig. 3.6 Courbe Q-H<sub>p</sub> d'une pompe centrifuge

En pratique, cette courbe peut être tracée point par point en utilisant le montage décrit à la figure 3.7 où P<sub>e</sub> et P<sub>s</sub> représentent les lectures manométriques à l'entrée et à la sortie de la pompe.

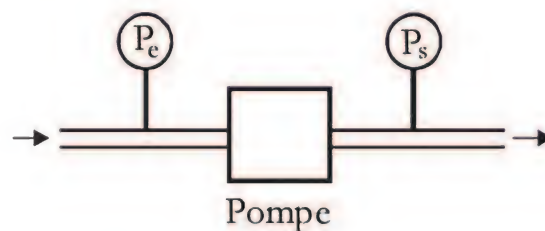


Fig. 3.7 Installation pour la mesure de Q-H<sub>p</sub>

Ces lectures manométriques fournissent directement H<sub>p</sub> à l'aide de la relation suivante :

$$H_p = \frac{P_s - P_e}{\rho g} \quad (3.4)$$

Un débitmètre, de type Venturi par exemple, mesure le débit qui correspond à une valeur donnée de  $H_p$ . Quand la vanne de contrôle du débit est complètement fermée, la hauteur manométrique lue est appelée hauteur de fermeture. Quand la vanne de contrôle du débit est complètement ouverte, le débit indiqué est appelé le débit de fonctionnement. Pour tracer la courbe caractéristique d'une pompe, on doit relever la hauteur de fermeture quand la vanne est complètement fermée. On ouvre ensuite la vanne en trois temps pour obtenir approximativement  $Q_{\text{fonctionnement}}/3$ ,  $2(Q_{\text{fonctionnement}}/3)$  et  $Q_{\text{fonctionnement}}$  en rapportant les hauteurs manométriques correspondantes sur le graphe  $Q-H_p$ .

### 3.4.2 Courbe de rendement

Le rendement  $\eta$  d'une pompe se calcule comme le rapport entre la puissance hydraulique fournie (2.15) et la puissance absorbée par la pompe :

$$\eta = (\text{puissance hydraulique fournie}) / (\text{puissance absorbée})$$

$$\eta = \frac{\rho g Q H_p}{P_{\text{absorbée}}} \quad (3.5)$$

La courbe de rendement d'une pompe se présente généralement telle que montrée sur la figure 3.8.

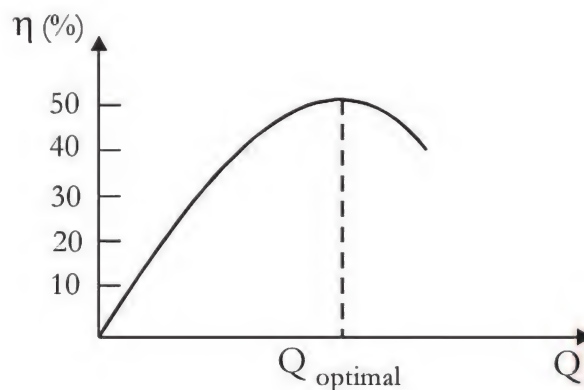


Fig. 3.8 Courbe de rendement d'une pompe

La puissance hydraulique fournie se déduit de la courbe  $Q-H_p$  traitée précédemment. La puissance absorbée doit être mesurée directement et constitue en soi une troisième courbe caractéristique de la pompe.



Un débitmètre, de type Venturi par exemple, mesure le débit qui correspond à une valeur donnée de  $H_p$ . Quand la vanne de contrôle du débit est complètement fermée, la hauteur manométrique lue est appelée hauteur de fermeture. Quand la vanne de contrôle du débit est complètement ouverte, le débit indiqué est appelé le débit de fonctionnement. Pour tracer la courbe caractéristique d'une pompe, on doit relever la hauteur de fermeture quand la vanne est complètement fermée. On ouvre ensuite la vanne en trois temps pour obtenir approximativement  $Q_{\text{fonctionnement}}/3$ ,  $2(Q_{\text{fonctionnement}}/3)$  et  $Q_{\text{fonctionnement}}$  en rapportant les hauteurs manométriques correspondantes sur le graphe  $Q - H_p$ .

### 3.4.2 Courbe de rendement

Le rendement  $\eta$  d'une pompe se calcule comme le rapport entre la puissance hydraulique fournie (2.15) et la puissance absorbée par la pompe :

$$\eta = (\text{puissance hydraulique fournie}) / (\text{puissance absorbée})$$

$$\eta = \frac{\rho g Q H_p}{P_{\text{absorbée}}} \quad (3.5)$$

La courbe de rendement d'une pompe se présente généralement telle que montrée sur la figure 3.8.

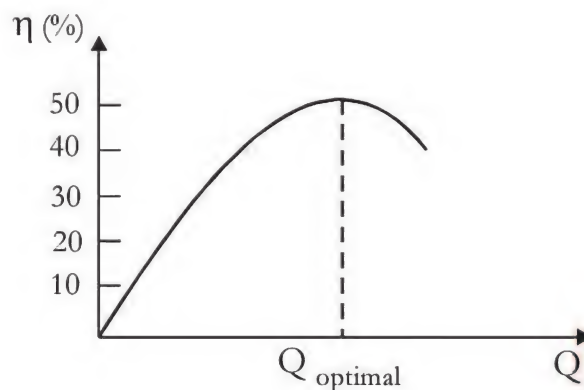


Fig. 3.8 Courbe de rendement d'une pompe

La puissance hydraulique fournie se déduit de la courbe  $Q - H_p$  traitée précédemment. La puissance absorbée doit être mesurée directement et constitue en soi une troisième courbe caractéristique de la pompe.

Quand le débit est nul, le rendement est nul car la puissance hydraulique fournie est nulle puisque  $P_{\text{hydraulique}} = \rho g Q H_p$ . Le rendement augmente avec le débit pour atteindre une valeur maximale et diminue ensuite pour des valeurs du débit supérieures au débit optimal. La figure 3.8 montre que le rendement d'une pompe centrifuge varie sensiblement en fonction du débit. On doit donc s'assurer que le débit d'opération soit le plus proche possible du débit optimal pour minimiser la consommation énergétique.

Les pompes à haute pression ou à fort débit peuvent fournir des rendements aussi importants que 90%. Les pompes à basse pression ou à faible débit peuvent produire un rendement aussi médiocre que 40%.

### 3.5 Vitesse spécifique

#### 3.5.1 Définition et considérations théoriques

La vitesse spécifique  $n_s$  (nombre de Brauer) d'une pompe se calcule pour le rendement maximal par la relation suivante :

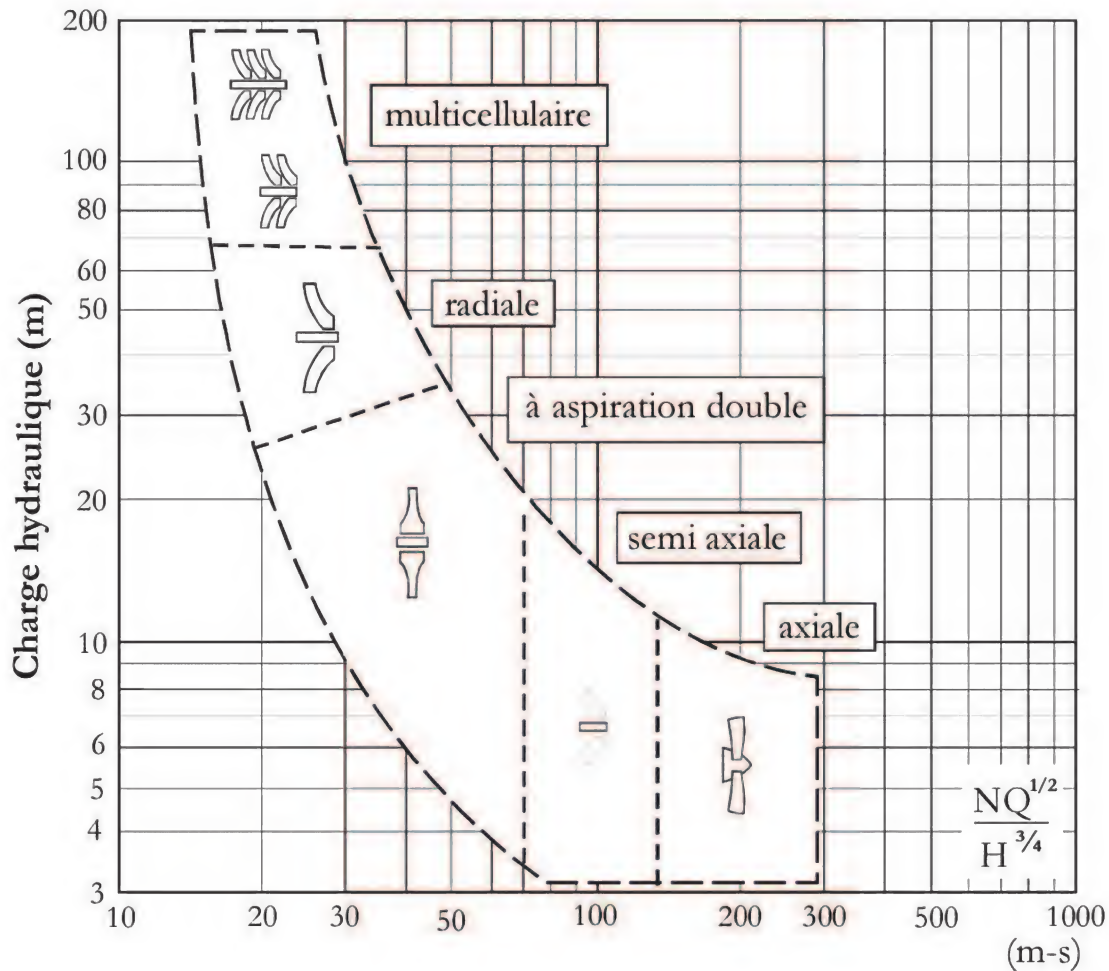
$$n_s = \frac{NQ^{1/2}}{H^{3/4}} \quad (3.6)$$

où  $N$  est la vitesse de rotation de la roue de la pompe (rpm),  
 $Q$  est le débit optimal de la pompe ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),  
 $H$  est la hauteur manométrique correspondant au débit optimal (m).

La vitesse spécifique  $n_s$  d'une pompe est indépendante de la vitesse réelle de rotation. Lorsque la vitesse  $N$  varie, le débit  $Q$  et la hauteur manométrique  $H$  vont aussi varier de telle sorte que le rapport  $n_s = NQ^{1/2}/H^{3/4}$  reste constant.

La valeur de la vitesse spécifique est une caractéristique de chaque groupe de pompes semblables. Elle caractérise l'importance du débit et de la hauteur d'élévation que la pompe doit vaincre.

La relation (3.6) montre qu'à valeurs égales de débit et de vitesse de rotation, les pompes de grande vitesse spécifique ( $n_s > 170$ ) fonctionnent avec une hauteur d'élévation faible. Ces pompes sont généralement à écoulement axial (figure 3.9).



**Fig. 3.9 Écoulement dans les pompes**

Adapté de Stephenson (1981)

Inversement, les pompes de faible vitesse spécifique ( $n_s < 70$ ) fonctionnent avec une forte hauteur d'élévation. Ces pompes sont généralement multicellulaires à écoulement radial et à aspiration simple (figure 3.9).

Entre ces deux extrêmes, les pompes à vitesse spécifique intermédiaire ( $n_s = 100$ ) fonctionnent avec une hauteur d'élévation modérée et sont à écoulement semi axial.



La figure 3.10 illustre la relation entre la forme de la roue et la valeur de la vitesse spécifique. Cette figure donne aussi l'ordre de grandeur du rendement pour différentes valeurs du débit et de la vitesse spécifique.

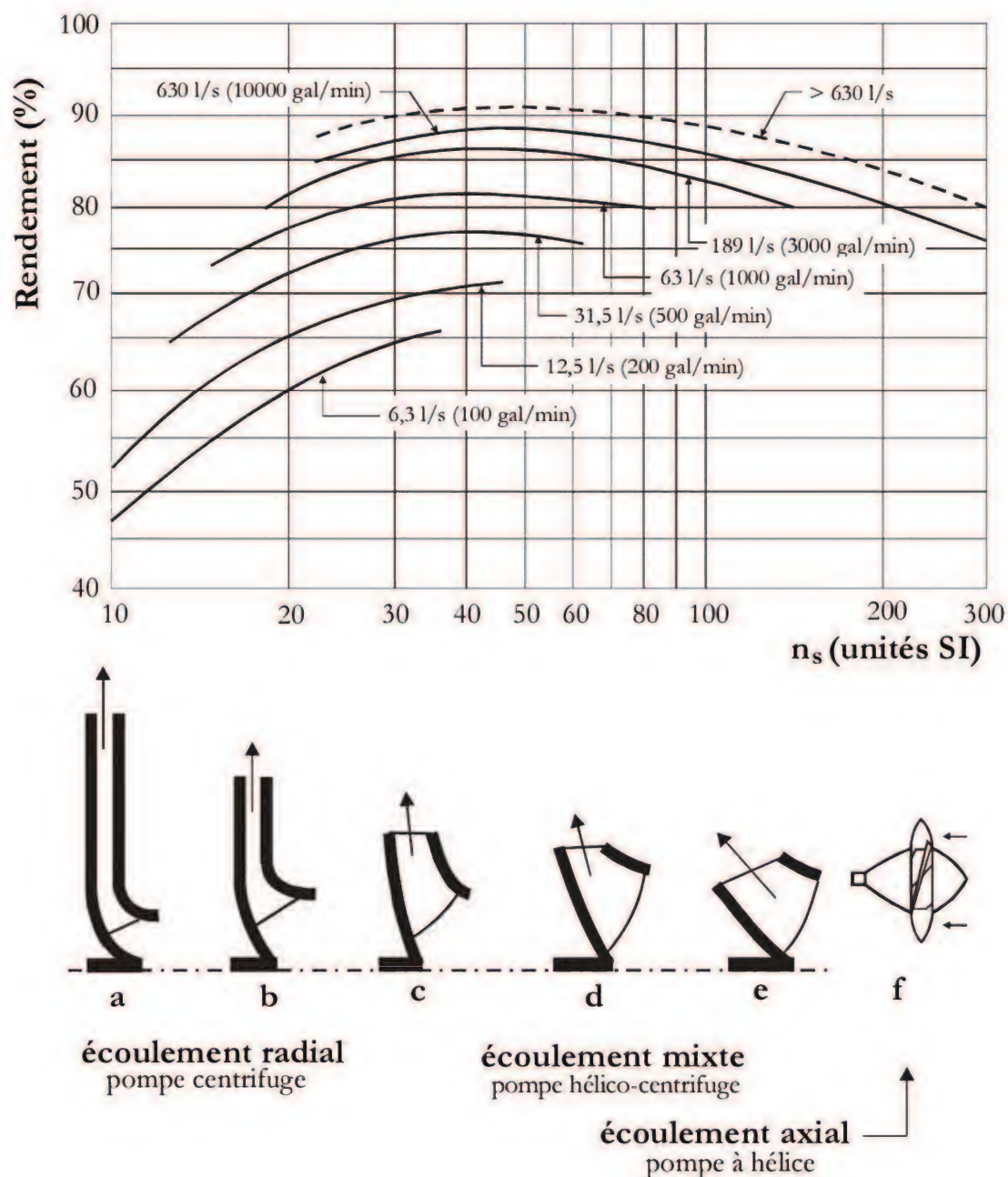
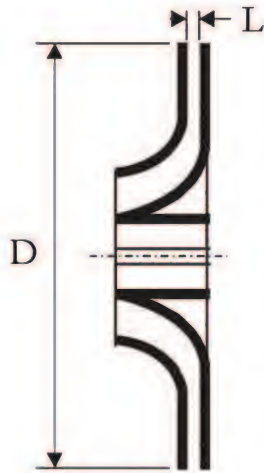


Fig. 3.10 Conditions d'écoulement dans les pompes  
Adapté de Carrassik *et al.* (1982)



Les pompes semblables possèdent un comportement hydraulique similaire résultant de leur forme géométrique. Les propriétés géométriques prises en considération sont le diamètre  $D$  de la roue et la largeur  $L$  de la sortie, tel que montré sur la figure 3.11 (Dupont, 1988).

Fig. 3.11 Illustration de  $D$  et  $L$

Deux pompes semblables d'un même groupe voient leurs propriétés géométriques obéir à un facteur d'homothétie  $\lambda$  tel que :

$$\lambda = \frac{D_1}{D_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad (3.7)$$

### ***Application 3.1***

On désire pomper un débit de 15 litres par seconde à une hauteur d'élévation de 20,0m incluant les pertes de charge. La vitesse de rotation du moteur qui entraîne la pompe est de 1460 tours par minute. Quel type de pompe devrait-on utiliser?

L'équation (3.6) donne la vitesse spécifique  $n_s = 18$ . La figure 3.9 montre qu'une pompe radiale doit être utilisée. La figure 3.10 confirme ce choix en précisant le rendement de 70%.

### 3.5.2 Applications pratiques de la vitesse spécifique

La vitesse spécifique est une caractéristique importante d'une pompe. Sa connaissance guide le choix de la pompe la plus appropriée à une situation donnée. Connaissant le débit  $Q$  à pomper, la hauteur d'élévation  $H$  et la vitesse de rotation  $N$  du moteur accouplé à la pompe, on peut calculer la vitesse spécifique  $n_s$  (3.6). On choisira une pompe prototype de vitesse  $n$ , de débit  $q$  et de hauteur d'élévation  $h$  dont la vitesse spécifique est la plus proche possible de la vitesse spécifique calculée. On calcule ensuite le facteur d'homothétie par la relation suivante (Bonin, 1986):

$$\lambda = \left( \frac{Q}{q} \frac{n}{N} \right)^{1/3} \quad (3.8)$$

La pompe recherchée est une pompe du même groupe que la pompe prototype dont le diamètre du rotor et la largeur de sortie sont  $D = \lambda d$  et  $L = \lambda l$ ,  $d$  et  $l$  étant respectivement le diamètre et la largeur de sortie de la pompe prototype.

*Remarque :*

Une autre application de la vitesse spécifique se trouve dans le fonctionnement d'une pompe centrifuge par rapport au problème de cavitation traité plus loin.

## 3.6 Règles de similitude pour les pompes centrifuges

### 3.6.1 Rognage d'une pompe

Les pompes centrifuges obéissent à certaines règles de similitude qui découlent des relations exposées à la section 3.5. Soit une pompe dont le diamètre de la roue est  $D_1$  et qui délivre un débit  $Q_1$  avec une hauteur manométrique  $H_1$ . Le rognage de la pompe consiste à modifier le diamètre du rotor pour le ramener à une valeur  $D_2$  plus faible que  $D_1$ . Le débit, la hauteur manométrique et la puissance se voient alors modifiés comme suit :

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 \quad (3.10)$$



### Application 3.2

Soit une pompe dont la roue possède un diamètre de 250mm. La hauteur manométrique développée est de  $H_1 = 60\text{m}$  et le débit est  $Q_1 = 60$  litres par seconde. Si l'on ramène le diamètre de la roue à 225mm, quels sont la nouvelle hauteur manométrique, le débit et la puissance de cette nouvelle pompe?

D'après (3.9),  $H_1/H_2 = Q_1/Q_2 = (250/225)^2 = 1,234$ .

Donc  $H_2 = 48,6\text{m}$  et  $Q_2 = 48,6 \text{ l/s}$ .

D'après (2.15) :

$P_1 = 1000\text{kg/m}^3 \cdot 9,81\text{m/s}^2 \cdot 0,06\text{m}^3/\text{s} \cdot 60\text{m} = 35316\text{W}$  (35,3kW).

D'après (3.10),  $P_2 = 35,3\text{kW} \cdot (225/250)^4 = 23,2\text{kW}$ .

#### Remarque :

Le rognage maximal des roues se situe entre 10% et 20%, selon le type de pompe. Au-delà de cette limite, le rendement de la pompe diminue significativement et les lois de similitude (3.9) et (3.10) ne sont plus vérifiées.

### 3.6.2 Modification de la vitesse de rotation

Les moteurs qui entraînent les roues des pompes peuvent être à vitesse fixe ou variable. Généralement, le débit à pomper varie en fonction de la demande et le moteur à vitesse variable permet l'accommodation à cette variation en gardant un rendement satisfaisant. Soit une pompe qui délivre un débit  $Q_1$  pour une hauteur d'élévation  $H_1$  quand le moteur tourne à une vitesse  $N_1$ . Lorsque la vitesse de rotation du moteur passe à  $N_2$ , le débit, la hauteur manométrique et la puissance se voient modifiés selon les rapports :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.11)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^3 \quad (3.13)$$

### Application 3.3

Une pompe dont la vitesse de rotation est  $N_1 = 1400$  rpm délivre un débit  $Q_1 = 60$  litres par seconde avec une hauteur d'élévation  $H_1 = 60$  m. On abaisse la vitesse à 1200 rpm. Il faut calculer le nouveau débit, la nouvelle hauteur manométrique et la puissance hydraulique fournie par cette pompe.

$N_1 / N_2 = 1,167$ . D'après (3.11),  $Q_2 = Q_1 / 1,167 = 51,4$  l/s.

D'après (3.12),  $H_2 = H_1 / 1,167^2 = 44,1$  m.

Comme dans l'exemple 3.2, d'après (2.15),  $P_1 = 35,3$  kW.

D'après (3.13),  $P_2 = P_1 / 1,167^3 = 22,7$  kW.

#### Remarque:

Comme les pompes à vitesse variable sont beaucoup plus dispendieuses que les pompes à vitesse fixe, une grande station de pompage sera normalement équipée d'une ou deux pompes à vitesse variable et de quelques pompes à vitesse fixe.

### 3.7 Point de fonctionnement

On se propose de résoudre le problème suivant. On utilise une pompe pour transférer de l'eau à 15°C du point 1 au point 2, tel que montré sur la figure 3.12.

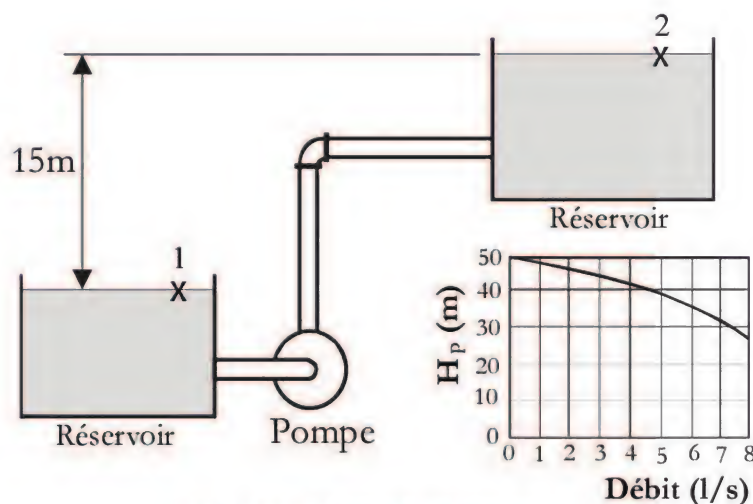


Fig. 3.12 Exemple de pompage

La courbe caractéristique de la pompe est fournie sur la figure 3.12. La conduite a une longueur totale de 1000m et un diamètre de 75mm. Elle est faite en acier commercial et possède un coefficient de Hazen-Williams de 130. Il faut déterminer le débit que va délivrer cette pompe.

Le *point de fonctionnement* de la pompe est donné par le couple  $(Q, H_p)$  auquel la pompe va opérer une fois insérée dans le système. Le calcul a priori du point de fonctionnement permet d'éviter une perte de temps due au montage d'une pompe inappropriée.

En négligeant les pertes singulières et ne retenant que les pertes par frottement données par la formule de Hazen-Williams (2.26), l'équation de Bernoulli écrite entre les surfaces libres des deux réservoirs est :

$$H_p = H_g + 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} \quad (3.14)$$

La pompe doit donc développer une pression  $H_p$  pour équilibrer la gravité  $H_g$  et les pertes de charge.

En utilisant les données du problème, l'équation (3.14) devient :

$$H_p = 15m + 390,66 \cdot 10^3 \cdot Q^{1,852} \quad (3.15)$$

Cette équation qui comporte deux inconnues  $Q$  et  $H_p$  peut être résolue graphiquement ou numériquement.

### 3.7.1 Solution graphique

L'équation (3.15) montre que la solution du problème est le point d'intersection des deux courbes  $H_p = H_p(Q)$  et  $f(Q) = 15 + 390,66 \cdot 10^3 Q^{1,852}$ . Ces deux fonctions sont superposées sur le graphe de la figure 3.13.

Le point de fonctionnement est donc  $Q = 5,25 \text{ l/s}$  et  $H_p = 38m$ .

D'une manière générale, le point de fonctionnement est le point d'intersection entre la courbe caractéristique de la pompe  $H_p$  et la courbe caractéristique de la conduite  $h_f$  majorée de  $H_g$ .



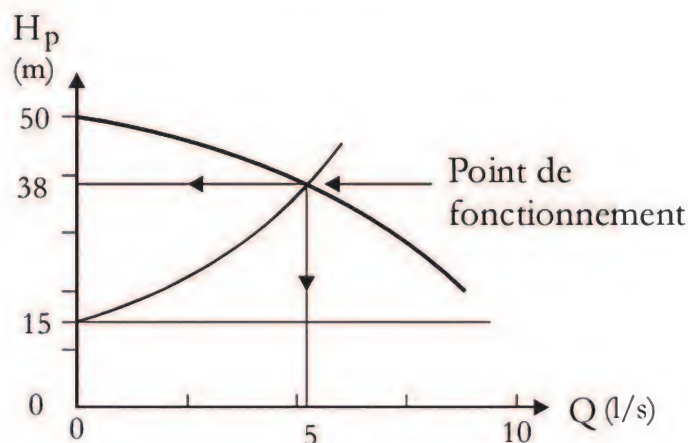


Fig. 3.13 Point de fonctionnement obtenu graphiquement

Dans le cas où la gravité est favorable, le point de fonctionnement est le point d'intersection entre la courbe caractéristique de la pompe  $H_p$  et la courbe caractéristique de la conduite transposée de  $H_g$  vers le bas.

### Application 3.4

Il s'agit de refaire le problème précédent en supposant que l'écoulement doit se faire dans le sens inverse, soit du réservoir 2 vers le réservoir 1. Dans ce cas, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$H_p + H_g = h_f \text{ ou } H_p = h_f - H_g.$$

La figure 3.14 illustre la dernière équation. L'énergie de la pompe et de la gravité s'additionnent pour équilibrer le frottement.

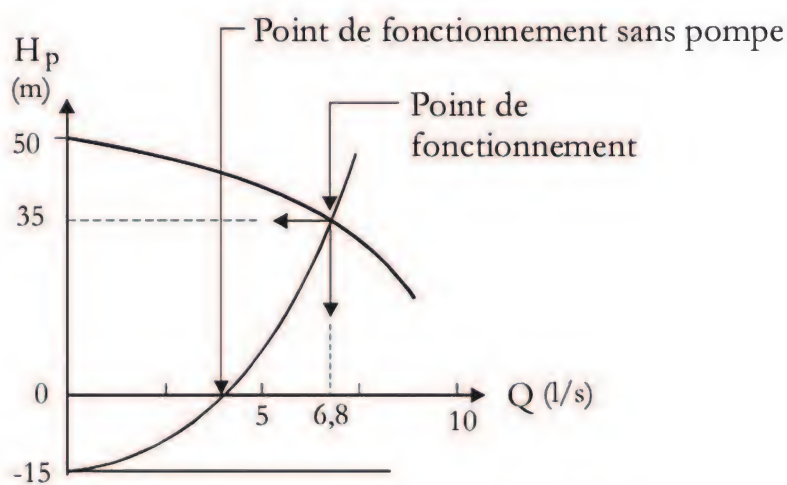


Fig. 3.14 Exemple de point de fonctionnement

Le point de fonctionnement est maintenant  $Q = 6,8 \text{ l/s}$  et  $H_p = 35\text{m}$ . Comme on pouvait s'y attendre, le débit de fonctionnement est plus élevé.

Soulignons en passant qu'on peut lire sur le graphe le débit d'écoulement gravitaire sans pompage. L'intersection de la courbe  $h_f - H_g$  avec l'axe des abscisses est en effet la solution de l'équation  $h_f = H_g$ .

### 3.7.2 Solution numérique

Toutes les opérations et tous les calculs sont dorénavant informatisés. Comme la solution graphique se prête mal à l'informatisation, on utilise plutôt une solution numérique.

Une telle solution consiste à relever au moins trois couples  $(Q, H)$  sur la courbe caractéristique de la pompe :  $(Q = 0, H = H_{\text{fermeture}})$  et deux autres points assez distancés. Ces trois couples sont ensuite utilisés pour trouver les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $n$  de la fonction suivante :

$$H_p = a + bQ^n \quad (3.16)$$

En l'occurrence,  $a = 50$ ,  $b = -1,0$  et  $n = -0,5150$ .

On peut maintenant résoudre (3.15) numériquement en remplaçant  $H_p$  par  $15 + 390,66 \cdot 10^3 \cdot Q^{1,852}$  dans (3.16).

## 3.8 Ajustement du point de fonctionnement

### 3.8.1 Problématique

Une fois le point de fonctionnement obtenu, on peut se trouver dans une des trois situations suivantes :

- 1) Le débit de fonctionnement trouvé est très proche du débit qu'on visait. C'est la situation idéale où on passe directement aux étapes de vérification de l'adéquation du rendement et à l'examen de la question de la cavitation (exposée au paragraphe 3.9).
- 2) Le débit de fonctionnement est inférieur au débit visé. Si la durée de pompage est déjà à son maximum ou ne peut pas être modifiée, il faut réviser le choix initial de la pompe et en choisir une de plus grande capacité.



- 3) Le débit de fonctionnement est supérieur au débit visé. Même si on exclut la diminution de la durée de pompage, plusieurs options s'offrent au concepteur. On a vu que le point de fonctionnement est le point d'intersection entre les courbes caractéristiques de la pompe et de la conduite. Pour ajuster ce point de fonctionnement, il faut soit modifier la courbe caractéristique de la pompe par rognage ou par changement de la vitesse de rotation, soit modifier la courbe caractéristique de la conduite en introduisant une perte de charge singulière par vannage.

### 3.8.2 Modification de la vitesse de rotation du moteur de la pompe

Le mode d'ajustement du point de fonctionnement qui affecte le moins le rendement de la pompe est la modification modérée de la vitesse de rotation du moteur qui entraîne la pompe. Cette modification peut être faite chez le constructeur pour les moteurs à vitesse fixe. Elle peut aussi être faite en cours de fonctionnement pour les pompes à vitesse variable (voir figure 3.15).

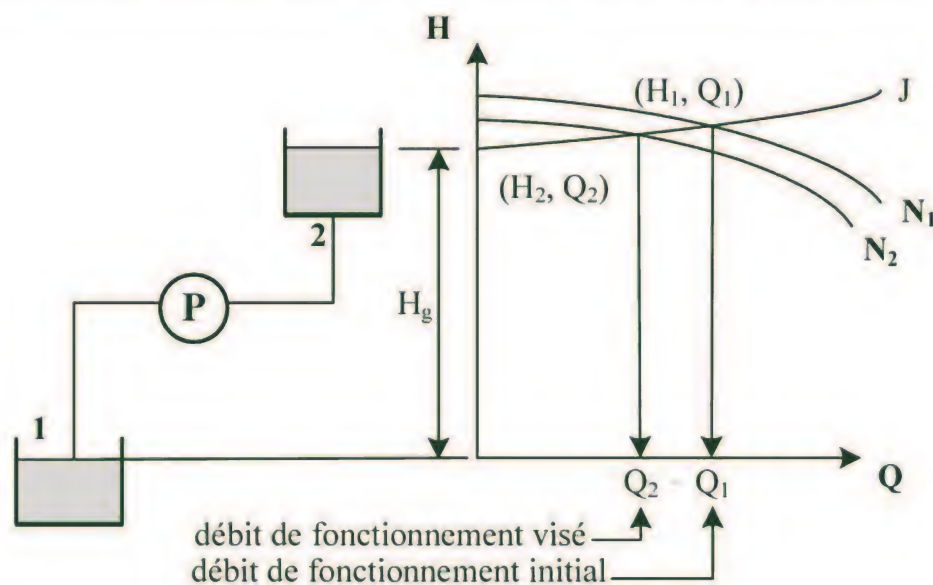


Fig. 3.15 Variation de la vitesse de la pompe

Quand la vitesse de rotation du moteur de la pompe est  $N_1$ , les courbes caractéristiques de la pompe et de la conduite se croisent pour donner un débit  $Q_1$ . On cherche une nouvelle vitesse  $N_2$  qui ferait croiser la courbe caractéristique de la pompe avec celle de la conduite en  $Q_2$ . Cette vitesse  $N_2$  est obtenue par la règle de similitude (3.11). Du même coup, la hauteur manométrique et la puissance se voient aussi modifiées selon (3.12) et (3.13), tel



qu'exposé à la section 3.6.2. Le coût d'une pompe à vitesse variable est beaucoup plus élevé que celui d'une pompe à vitesse fixe.

### 3.8.3 Modification du diamètre du rotor de la pompe

Si le débit est plus grand que nécessaire, il y a moyen de réduire le diamètre du rotor pour diminuer le débit et ajuster ainsi le point de fonctionnement tel qu'illustré par la figure 3.16.

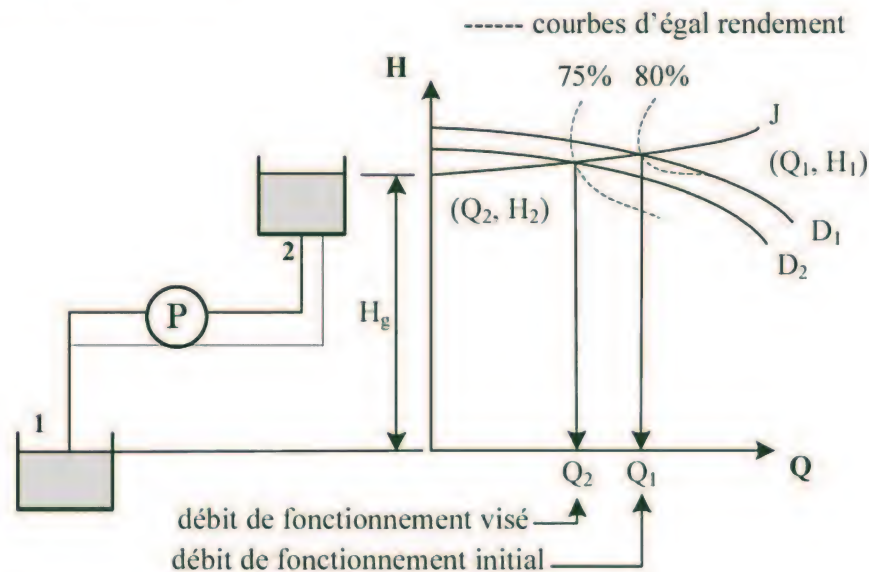


Fig. 3.16 Rognage de la roue de la pompe

Le constructeur met, a priori, le plus grand diamètre possible à l'intérieur de la volute pour tirer le maximum de puissance. Mais en réduisant le diamètre de  $D_1$  à  $D_2$  on obtient le nouveau débit de fonctionnement recherché.

Selon les règles de similitude exposées à la section 3.6.1, le diamètre cherché  $D_2$  est obtenu par (3.9). Par la même occasion, la hauteur manométrique et la puissance se voient modifiées selon (3.9) et (3.10).

Cette option vient au deuxième rang, après la modification de la vitesse de rotation, par rapport à la diminution du rendement de la pompe.

### 3.8.4 Réduction du débit par vannage

La fermeture de la vanne crée une perte de charge singulière qui dresse la courbe caractéristique de la conduite en réduisant le débit (figure 3.17).

Le coefficient de perte de charge singulière  $K$ , qui est presque nul pour la plupart des vannes quand celles-ci sont ouvertes, augmente rapidement avec la fermeture d'une vanne et atteint l'infini quand la vanne est complètement fermée.

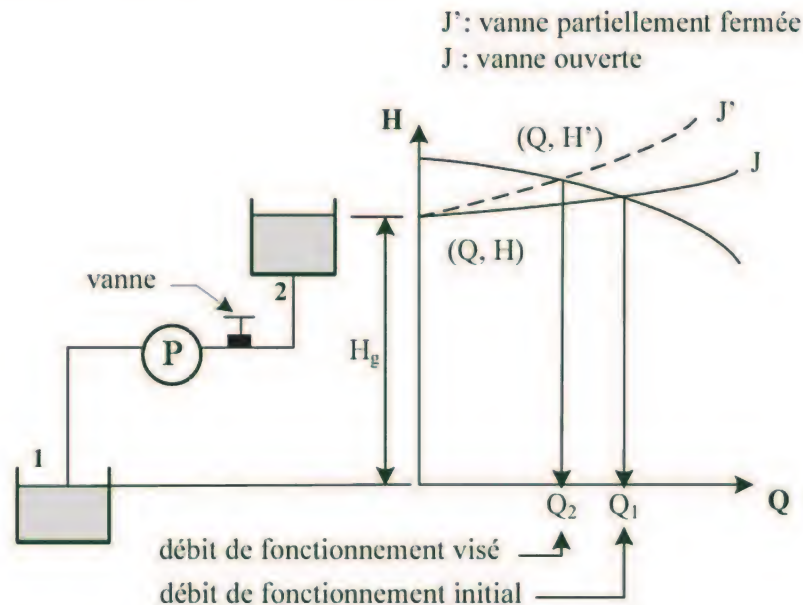


Fig. 3.17 Vanne sur la conduite de refoulement

Cette option est sans conteste la plus défavorable du point de vue rendement quand elle est utilisée d'une manière systématique.

### 3.9 Problème de cavitation dans les pompes

Pour traiter le problème de la cavitation dans les pompes centrifuges, regardons ce qui se passe du côté aspiration d'une pompe.

Deux cas peuvent se présenter :

- 1) l'eau à pomper se trouve à un point plus bas que le niveau de la pompe (puits, lac, rivière...) comme sur la figure 3.18 (1); on dit alors que le pompage se fait en dépression.
- 2) l'eau à pomper se trouve à un point plus haut que le niveau de la pompe, comme sur la figure 3.18 (2); on dit dans ce cas que le pompage se fait en surpression.



Le pompage en surpression peut se présenter quand l'aménagement d'une station de pompage a été réalisé volontairement à un endroit plus bas que celui du réservoir d'où l'eau est pompée pour assurer une pression adéquate à l'entrée des pompes. Ce cas peut aussi se présenter quand l'écoulement peut se faire d'une manière gravitaire mais peut profiter de la contribution du pompage. Ce dernier cas se présente quand la dénivellation entre le réservoir source et le point d'arrivée est faible et on choisit d'installer une pompe pour assurer un bon débit tout en ayant un diamètre de conduite économique.

L'application de l'équation de Bernoulli entre un point (1) situé à la surface libre du réservoir et un point (e) situé dans la conduite d'aspiration juste avant l'entrée dans la pompe s'écrit :

$$\left( \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} \right)_{\text{abs}} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \left( \frac{P_e}{\rho g} \right)_{\text{abs}} + z_e + \frac{V_e^2}{2g} + h_{\text{ft},a} \quad (3.17)$$

où  $P_e$ ,  $z_e$  et  $V_e$  désignent respectivement la pression, l'énergie potentielle et la vitesse à l'entrée de la pompe,  $h_{\text{ft},a}$  désigne la charge totale perdue par frottement et dans les singularités du côté aspiration.

Avec les hypothèses habituelles, cette équation s'écrit pour un pompage en dépression:

$$\left( \frac{P_e}{\rho g} \right)_{\text{abs}} = \left( \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} \right)_{\text{abs}} - h_a - \frac{V_e^2}{2g} - h_{\text{ft},a} \quad (3.18)$$

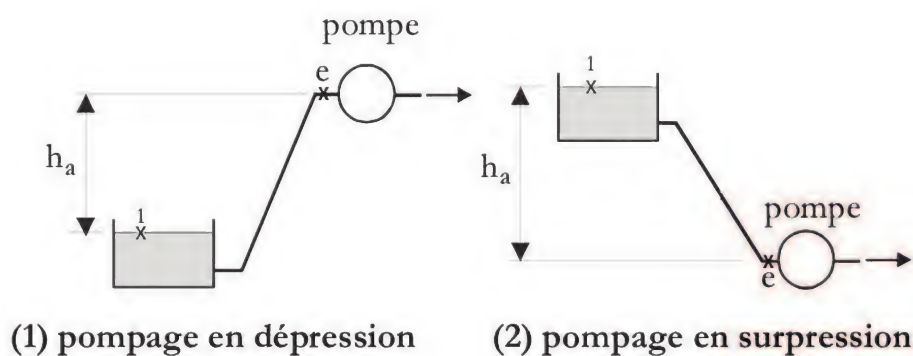


Figure 3.18 Différentes configurations du côté aspiration

Il est clair d'après l'expression (3.18) que la pression  $P_e$  à l'entrée de la pompe est plus basse que la pression atmosphérique. Il s'agit d'une dépression.



Selon les observations de la physique qu'on retrouve dans les ouvrages de thermodynamique, si la pression à l'entrée de la pompe atteint la pression de vapeur pour la température de l'eau, le liquide passe à l'état de vapeur. Une fois entrées dans la pompe, où règne une haute pression, les bulles de vapeur implosent en produisant un bruit de cailloux secoués, en endommageant et usant prématurément les aubes du rotor de la pompe. Sur le plan hydraulique, lorsque la pompe fonctionne en condition de cavitation, la pression et le rendement délivrés par la pompe chutent d'une manière brusque et marquée. À un niveau avancé de cavitation, il y a rupture de la veine liquide et désamorçage de la pompe. En pratique, on observe le phénomène de cavitation décrit précédemment bien avant que la pression à l'entrée de la pompe  $(P_e)_{abs}$  atteigne la pression de vapeur  $P_v$  qui varie avec la température de l'eau. C'est pour cette raison que nous définissons une charge absolue nette à l'aspiration en excédent à la charge de pression de vapeur à une température donnée :

$$(NPSH)_{disponible} = \left( \frac{P_e}{\rho g} \right)_{abs} - \frac{P_v}{\rho g} = \left( \frac{P_{atm}}{\rho g} \right)_{abs} - h_a - \frac{V_e^2}{2g} - h_{ft,a} - \frac{P_v}{\rho g} \quad (3.19)$$

Cette charge d'aspiration est notée NPSH (Net Positive Suction Head) dans les ouvrages rédigés en anglais.

Aux conditions atmosphériques standard et à une température de 20°C, la pression atmosphérique et la pression de vapeur valent :

$$\frac{P_{atm}}{\rho g} = 10,33 \text{ m (eau)} \quad \text{et} \quad \frac{P_v}{\rho g} = 0,24 \text{ m (eau)}$$

L'équation du NPSH (3.19) s'écrit alors :

$$(NPSH)_{disponible} = 10,09 \text{ m} - \frac{V_e^2}{2g} - h_a - h_{ft,a} \quad (3.20)$$

Dans les conduites bien conçues, la vitesse d'écoulement est de l'ordre de 1m/s, de telle sorte que le terme  $V_e^2/2g$  ( $\approx 0,05\text{m}$ ) peut soit être négligé soit inclus dans  $h_{ft,a}$  comme un terme de perte de charge singulière avec un coefficient  $K = 1$ . L'équation du NPSH simplifiée s'écrit alors :

$$(NPSH)_{disponible} = 10 \text{ m} - h_a - h_{ft,a} \quad (3.21)$$

On voit qu'une fois tous les paramètres de l'installation fixés (diamètre, longueur, matériau), la charge disponible à l'entrée de la pompe décroît d'une manière parabolique en fonction du débit pompé.

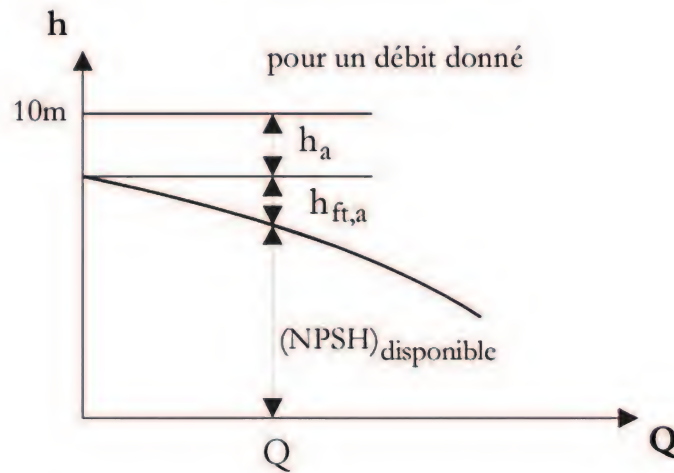


Fig. 3.19 NPSH pour pompage en dépression

Le figure 3.19 représente l'illustration graphique de l'équation (3.25) dans le cas d'un pompage en dépression.

D'un autre côté, le constructeur de pompes effectue des tests indépendamment de toute installation et détermine la charge minimale requise à l'entrée de la pompe pour éviter le phénomène de cavitation. Les mesures se présentent sous la forme de la courbe caractéristique de la pompe donnant le NPSH requis en fonction du débit, tel que montré sur la figure 3.20.

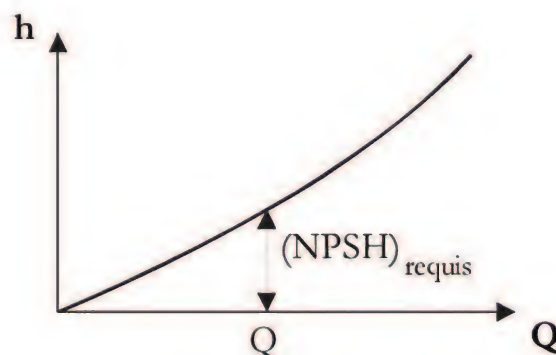


Fig. 3.20 Courbe caractéristique d'une pompe



Lorsqu'on installe la pompe à une hauteur statique  $h_a$  donnée et avec des dimensions de la conduite d'aspiration fixées, il faut superposer les courbes du  $(NPSH)_{disponible}$  et du  $(NPSH)_{requis}$ , comme le montre la figure 3.21.

On voit clairement qu'il existe un débit critique pour lequel la charge disponible est égale exactement à la charge requise. Pour des débits inférieurs à ce débit critique, la charge disponible, représentée par  $(NPSH)_D$ , est supérieure à la charge requise et il n'y aura aucun danger de cavitation. Pour des débits supérieurs au débit critique, on voit que la charge disponible est inférieure à la charge requise et il y a danger de cavitation. Par conséquent, quand on détermine le point de fonctionnement d'une pompe, il faut que le débit correspondant soit inférieur au débit critique pour éviter le phénomène de cavitation.

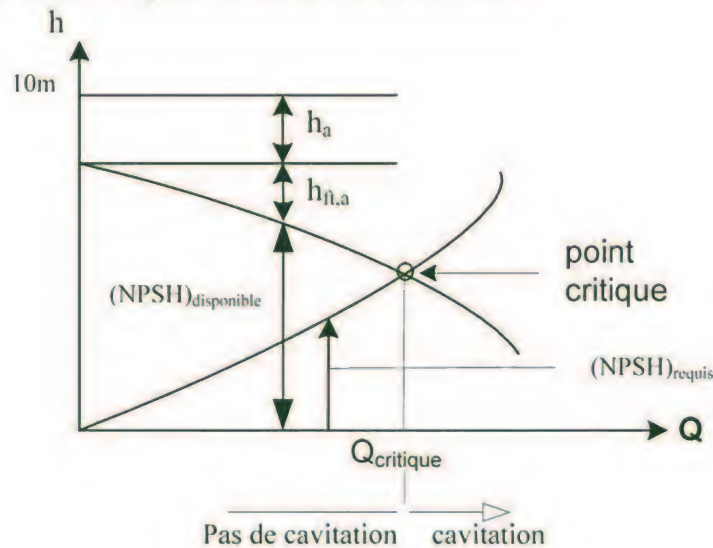


Fig. 3.21 NPSH

Revenons maintenant à la figure 3.18 (2). Comme le pompage s'opère en surpression à partir du point 1, l'équation (3.21) doit s'écrire :

$$NPSH = 10m + h_a - h_{f,a} \quad (3.22)$$

On peut donc écrire d'une manière générale :

$$NPSH = 10m \pm h_a - h_{f,a} \quad (3.23)$$

Ce NPSH exprime la charge réellement disponible dans une installation donnée, une fois la hauteur statique à l'aspiration  $h_a$  et tous les paramètres qui entrent en



considération dans le calcul de la perte de charge totale du côté aspiration  $h_{ft,a}$  ont été fixés. C'est pour cette raison que l'on désigne cette charge par :

$$(\text{NPSH})_{\text{disponible}} = 10\text{m} \pm h_a - h_{ft,a} \quad (3.24)$$

En remplaçant  $h_{ft,a}$  par son expression (2.21), on obtient :

$$(\text{NPSH})_{\text{disponible}} = 10\text{m} \pm h_a - 0,0827 f \frac{L_{t,a} Q^2}{D_a^5} \quad (3.25)$$

### Application 3.5

Vérifions s'il y a risque de cavitation pour la pompe du cas montré à la figure 3.22.

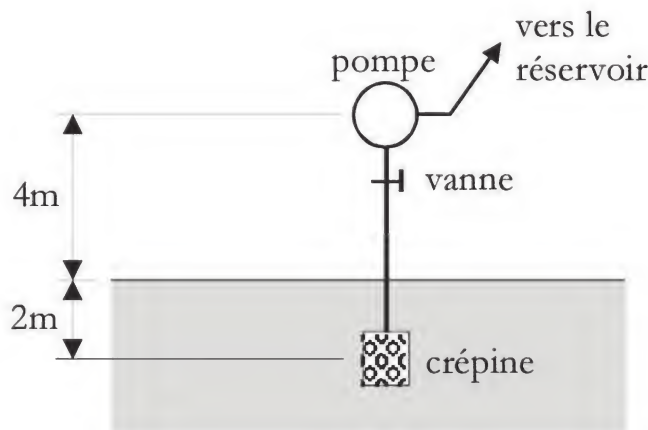


Fig. 3.22 Exemple de pompage en dépression

La courbe du  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$  fournie par le manufacturier de la pompe est montrée sur la figure 3.23.

Les données du problème sont :

- eau à 4°C,
- pertes de charge singulières : crépine ( $K=10$ ), vanne ( $K=3$ ),
- diamètre de la conduite d'aspiration = 0,075m,
- pression atmosphérique standard = 101kPa,
- $C_{HW} = 130$ ,
- débit pompé  $Q = 5,0 \text{ l/s}$ .

$$(\text{NPSH})_{\text{disponible}} = 10\text{m} - h_a - h_{f,a}$$

$$h_a = 4\text{m}$$

$$h_{f,a} = L \left( \frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}} + 0,0826 \frac{Q^2}{D^4} \sum K_i$$

$$h_{f,a} = 6 \left( \frac{3,59}{130} \right)^{1,852} \left( \frac{0,005^{1,852}}{0,075^{4,87}} \right) + 0,0826 \frac{0,005^2}{0,075^4} (10 + 3)$$

$$f_{f,a} = 0,128\text{m} + 0,848\text{m} = 0,976\text{m}$$

Le  $(\text{NPSH})_{\text{disponible}}$  est donc  $(10\text{m} - 4\text{m} - 0,976\text{m})$ , soit  $5,024\text{m}$ .

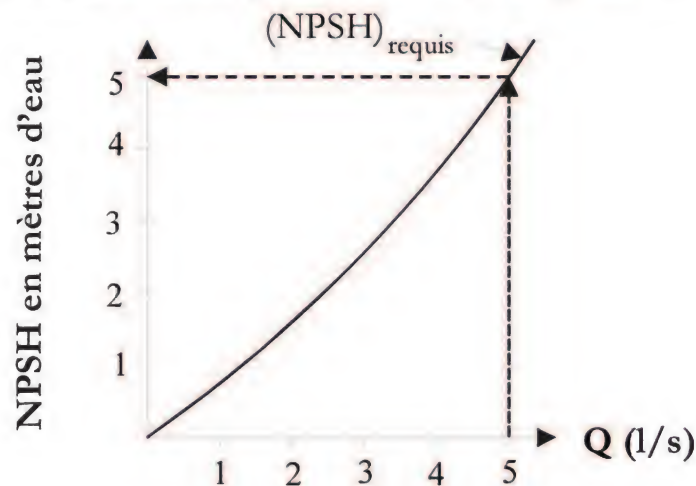


Fig. 3.23 Courbe caractéristique de la pompe

D'après la figure 3.23, le  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$  est de  $5\text{m}$  pour le débit de fonctionnement de  $5\text{ l/s}$ .

Le  $(\text{NPSH})_{\text{disponible}}$  étant supérieur au  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$ , il n'y a pas de danger de cavitation.

### Remarques importantes

- Supposons qu'à la suite d'une période sèche soutenue, le niveau du réservoir considéré dans l'exemple précédent ait baissé de  $1\text{ mètre}$ . Est-ce qu'il y a danger de cavitation?  
Le  $(\text{NPSH})_{\text{disponible}}$  devient  $10\text{m} - 5\text{m} - 0,976\text{m} = 4,024\text{m}$ .  
Comme le  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$  est toujours  $5\text{ mètres}$ , il y a danger évident de cavitation.

- 2) Le niveau du réservoir est maintenu à sa valeur initiale mais, à la suite d'une période chaude, la température de l'eau a atteint 30°C. Y a-t-il danger de cavitation? Rappelons que la formule (3.21) du NPSH a été établie pour une température de l'eau de 4°C. Comme la température est maintenant beaucoup supérieure à 4°C, la pression de vapeur se trouve modifiée. En utilisant la formule initiale :

$$\begin{aligned} (\text{NPSH})_{\text{disponible}} &= 10,33\text{m} - h_a - \frac{V_c^2}{2g} - h_{f,a} - \frac{P_v}{\rho g} \\ &= 10,33\text{m} - 4,00\text{m} - 0,05\text{m} - 0,098\text{m} - 0,43\text{m} = 4,87\text{m}. \end{aligned}$$

Cette quantité est inférieure au  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$ . Il y a donc danger de cavitation.

- 3) Tous les paramètres sont identiques à ceux de l'application 3.5, sauf que quelques années après l'installation, la conduite d'aspiration s'est corrodée de telle sorte que le coefficient de Hazen-Williams est devenu  $C_{\text{HW}} = 40$ . Quel est l'effet sur la cavitation? La perte de charge dans la conduite d'aspiration devient maintenant  $h_{f,a} = 1,98\text{m}$  et le  $(\text{NPSH})_{\text{disponible}}$  devient  $10,00\text{m} - h_{f,a} - h_a = 4,02\text{m}$ . Cette charge est inférieure au  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$ , d'où un danger de cavitation. Si on avait de plus pris en considération l'effet de la réduction du diamètre de la conduite, le résultat aurait été plus inquiétant pour la cavitation.

- 4) Considérons maintenant le cas où le système de l'exemple doit être installé dans une région montagneuse située à une altitude de 1000m, avec les mêmes paramètres de départ. Y a-t-il danger de cavitation?

À une altitude de 1000m,  $\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g}$  n'est pas 10,33m (eau) mais seulement 9,12m (eau). Le

$(\text{NPSH})_{\text{disponible}}$  est donc diminué de 1,21m et devient 3,90m. Cette charge étant inférieure au  $(\text{NPSH})_{\text{requis}}$ , il y a danger de cavitation.

Trois conclusions peuvent être tirées des remarques précédentes :

- 1) Une première conclusion est d'ordre général : il faut se méfier du culte des formules toutes prêtes et ne jamais perdre de vue les hypothèses sous-jacentes; il faut remonter à la formulation de base quand une hypothèse n'est pas respectée.
- 2) Une deuxième conclusion concerne spécifiquement le problème de cavitation. L'ingénieur doit considérer, dès l'étape de conception, les pires conditions de fonctionnement. Il ne doit pas se fier à un niveau des hautes eaux pour calculer  $h_a$  mais prendre en considération au moins la fluctuation sur une année complète en se gardant une marge de sécurité de 1,0 mètre. Il doit aussi prendre en considération le vieillissement de la tuyauterie et la réduction éventuelle du diamètre.
- 3) On conclut aussi qu'on peut éliminer la cavitation si on peut :
  - augmenter le diamètre de la conduite d'aspiration,
  - abaisser le niveau de la pompe,
  - rehausser le niveau du réservoir d'aspiration,



- réduire le frottement dans la conduite d'aspiration,
- réduire le nombre de singularités sur la conduite d'aspiration,
- réduire la vitesse de rotation,
- réduire le diamètre de la roue de pompe,
- diminuer le débit pompé,
- utiliser des pompes plus petites en parallèle,
- utiliser des pompes verticales ou submersibles.

### 3.10 Critères d'acceptation du point de fonctionnement

Une fois le débit de fonctionnement accepté par rapport à sa valeur quantitative, il faut examiner deux paramètres qualitatifs : 1) l'acceptabilité du rendement et 2) la sécurité du point de vue de la cavitation.

- 1) Pour les grandes stations de pompage où la quantité d'énergie en jeu est considérable, le rendement  $\eta$  doit rester le plus près possible du rendement optimal ( $\eta_{opt}$ ) pour chacune des pompes. Une perte de 1% de rendement peut se refléter en dizaines de milliers de dollars sur le coût annuel de l'énergie. En tout état de cause, on ne doit pas tolérer un écart de rendement supérieur à 5%.
- 2) Le débit de fonctionnement se trouve-t-il dans la zone de cavitation? Pour répondre à cette question il faut superposer sur le même graphique, d'une part, les courbes caractéristiques de la pompe et de la conduite pour trouver le point de fonctionnement et, d'autre part, les courbes du  $NPSH_{disponible}$  et du  $NPSH_{requis}$  pour trouver le débit critique au-delà duquel il y a cavitation (figure 3.24). Si le débit de fonctionnement est supérieur à ce débit critique il y a cavitation. Dans ce cas, une des solutions proposées à la section 3.9 peut être envisagée.

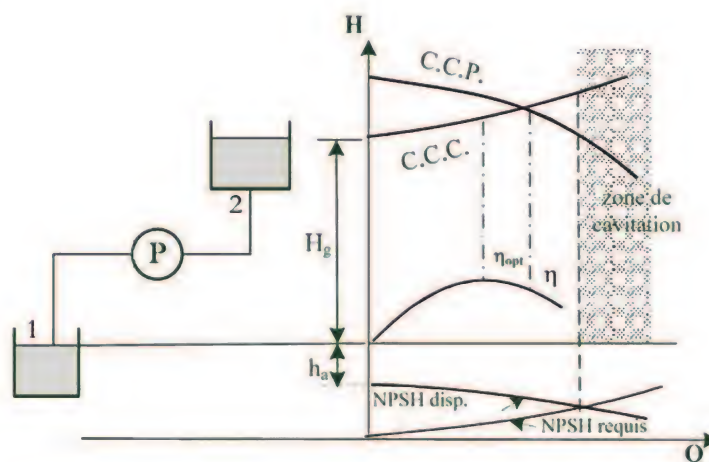


Fig. 3.24 Point de fonctionnement et zone de cavitation

### 3.11 Pompes en série et pompes en parallèle

Une station de pompage renferme généralement plusieurs pompes arrangées en série ou en parallèle pour plusieurs considérations techniques et opérationnelles. Comme on va le voir, il y a une analogie entre le fonctionnement des conduites et des pompes en série et en parallèle.

#### 3.11.1 Pompes en série

On dit que des pompes sont placées en série quand le débit qui passe par chacune d'elles est le même alors que les pressions développées s'additionnent (figure 3.25). On vérifie le NPSH à l'entrée de la pompe  $P_1$  seulement.

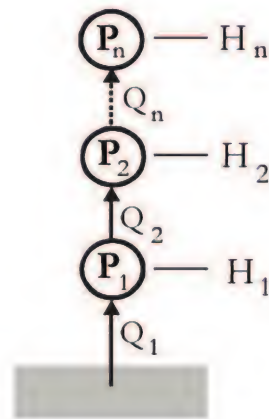


Fig. 3.25 Pompes en série

$$Q_1 = Q_2 \dots = Q_n \quad (3.26)$$

$$H_T = H_1 + H_2 + \dots + H_n \quad (3.27)$$

On utilise donc des pompes en série pour atteindre de grandes hauteurs d'élévation. La courbe caractéristique équivalente de plusieurs pompes en série (figure 3.26) s'obtient à partir des courbes caractéristiques individuelles en appliquant les équations (3.26) et (3.27).

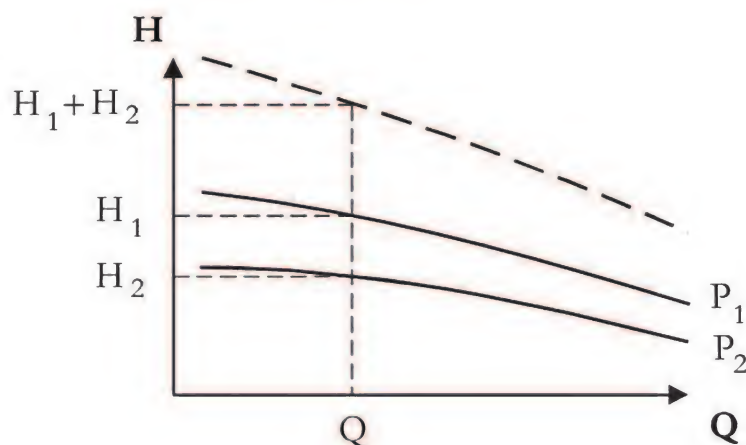


Fig. 3.26 Courbe caractéristique de deux pompes en série

Pour des considérations techniques et économiques, on n'utilise pas des pompes en série mais plutôt des pompes multicellulaires qui sont basées sur le même principe. On obtient une pompe multicellulaire en intercalant sur le même arbre plusieurs roues montées en série.

Pour trouver le point de fonctionnement individuel de chacune des pompes placées en série, on commence par trouver le point de fonctionnement de l'ensemble des pompes. Comme le montre la figure 3.27, ce point est l'intersection de la courbe caractéristique de la pompe équivalente C.C.P.E. avec la courbe caractéristique de la conduite équivalente C.C.C.E.

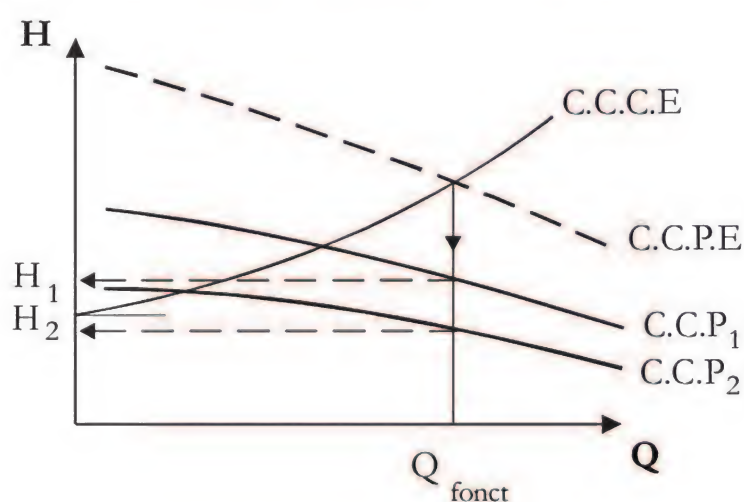


Fig. 3.27 Point de fonctionnement pour des pompes en série



La hauteur manométrique fournie par chacune des pompes est lue sur la courbe caractéristique pour la valeur du débit égale au débit de fonctionnement.

Par ailleurs, la puissance totale absorbée peut être calculée par la formule :

$$P_T = \rho g Q_{\text{fonct}} \left( \frac{H_1}{\eta_1} + \frac{H_2}{\eta_2} + \dots + \frac{H_n}{\eta_n} \right) \quad (3.28)$$

où  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  sont les rendements respectifs des pompes correspondant aux hauteurs de fonctionnement  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .

Soulignons finalement que lorsque plusieurs pompes sont placées en série, seule la première risque de manquer de pression à son entrée et de subir la cavitation. Il faut donc vérifier la condition de cavitation uniquement pour cette pompe.

### 3.11.2 Pompes en parallèle

On dit que des pompes sont placées en parallèle quand leurs points d'aspiration et de refoulement sont identiques (figure 3.28).

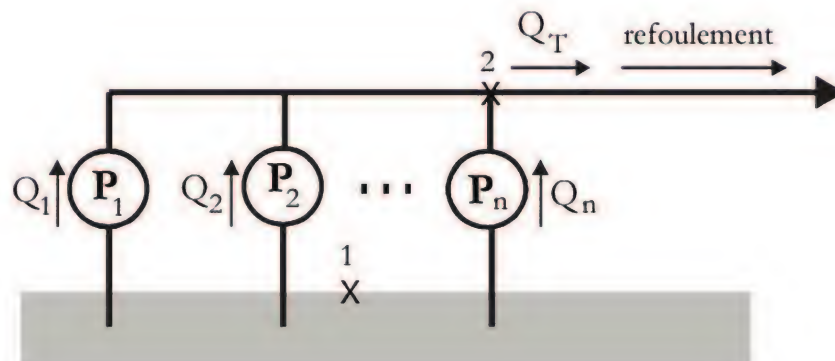


Fig. 3.28 Pompes en parallèle

En écrivant l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 pour chacune des pompes (figure 3.28), on constate que :

$$H_1 = H_2 = \dots = H_n \quad (3.29)$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \quad (3.30)$$

D'après (3.30), les pompes sont placées en parallèle pour augmenter le débit. En fait, dans une station de pompage, le débit varie généralement en fonction de l'heure de la journée et de la journée de la semaine. Afin de couvrir une grande gamme de variations de débit avec un rendement acceptable, il faut faire démarrer ou arrêter successivement un certain nombre de pompes selon la variation de la demande.

Les relations (3.29) et (3.30) permettent de trouver la courbe caractéristique d'une pompe équivalente représentant deux pompes placées en parallèle (figure 3.29).

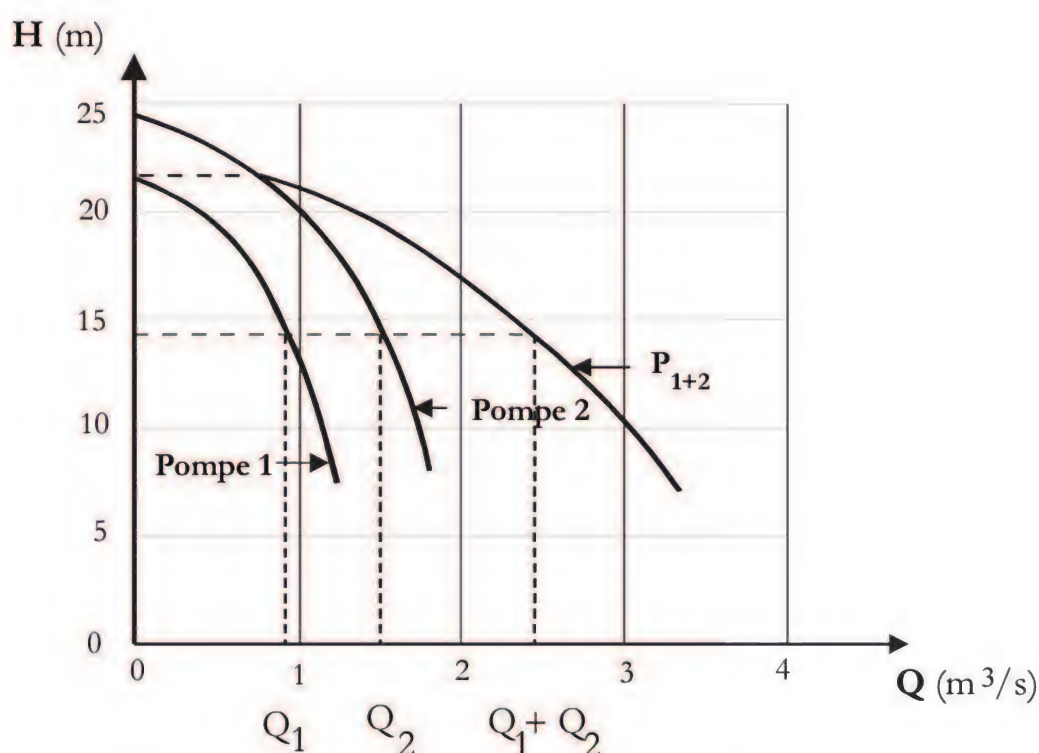


Fig. 3.29 Courbe caractéristique de pompes en parallèle

Pour trouver le point de fonctionnement individuel de chacune des pompes fonctionnant en parallèle, on commence par trouver le point de fonctionnement global de pompage. Comme le montre la figure 3.30, ce point est l'intersection de la courbe caractéristique équivalente des pompes (C.C.P.E.) avec la courbe caractéristique équivalente des conduites (C.C.C.E.). Le débit fourni séparément par chacune des pompes est lu sur leurs courbes caractéristiques respectives (C.C.P<sub>1</sub>, C.C.P<sub>2</sub>) pour une hauteur  $H = H_{\text{fonctionnement}}$ .



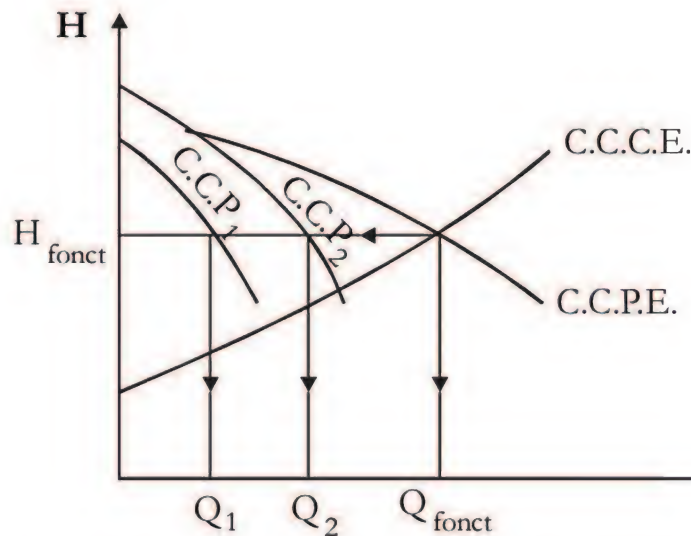


Fig. 3.30 Point de fonctionnement pour pompes en parallèle

Soulignons que lorsque plusieurs pompes sont placées en parallèle, il faut examiner séparément la question de la cavitation pour chacune des pompes avec leurs débits individuels respectifs.

Par ailleurs, la puissance totale absorbée peut être calculée par la formule :

$$P_T = \rho g H_{\text{fonct}} \left( \frac{Q_1}{\eta_1} + \frac{Q_2}{\eta_2} + \dots + \frac{Q_n}{\eta_n} \right) \quad (3.31)$$

où  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  sont les rendements respectifs des pompes correspondant aux débits de fonctionnement  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

### 3.12 Amorçage des pompes centrifuges

Une pompe centrifuge n'est pas capable de commencer à aspirer l'eau d'elle-même. Il est nécessaire de prévoir un système de remplissage de la conduite d'aspiration pour amorcer la pompe. Afin d'éviter que l'eau d'amorçage ne retourne vers le puits de pompage, il faut munir la conduite d'aspiration d'un clapet anti-retour. Il existe en pratique plusieurs procédés d'amorçage des pompes centrifuges (Dupont, 1988).

### 3.13 Profondeur d'immersion des prises d'eau

La figure 3.31 illustre le principe de calcul de la profondeur d'immersion minimale nécessaire pour éviter des tourbillons et l'introduction d'air dans la conduite d'aspiration. Par ailleurs, les prises d'eau seront espacées d'une distance de deux fois le diamètre de la cloche d'entrée de chacune des pompes.



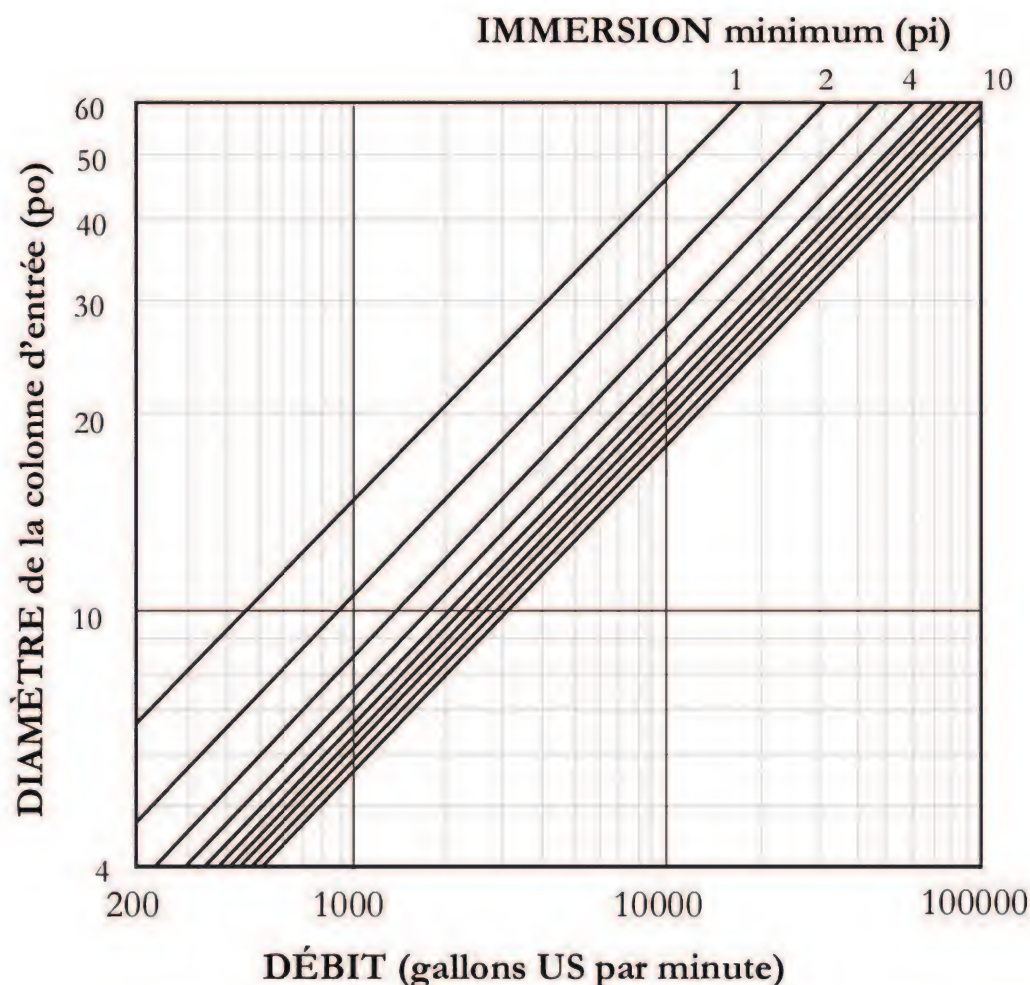


Fig. 3.31 Profondeur d'immersion des cloches d'aspiration (ASCE)

### 3.14 Choix des pompes

Une station de pompage type comprend plusieurs pompes placées en série et en parallèle. Le débit maximal ultime se répartit entre les pompes placées en parallèle pour faire face à la variation horaire et saisonnière de la demande. Quand la hauteur de relèvement est très importante et dépasse quelques centaines de mètres, les pompes multicellulaires s'imposent.

Afin de satisfaire au mieux les besoins de leurs clients, les constructeurs offrent sur le marché une grande gamme de types de pompes pouvant fournir différents débits et hauteurs manométriques. Le choix de la combinaison de pompes avec le meilleur rendement se fait à l'aide d'abaques sur lesquels est indiquée la portion de la hauteur manométrique où le rendement est admissible. Pour chaque type de pompe, on indique la courbe caractéristique de la pompe pour le diamètre maximal et minimal de la roue.

Les chiffres utilisés dans la figure 3.32 pour désigner le type de pompe indiquent les caractéristiques de ces pompes. Leur signification illustrée à l'aide de la pompe 2/32-200 est la suivante :

- 2        nombre d'étages,
- 32      diamètre nominal de la tubulure de refoulement,
- 200     diamètre nominal de la roue.

En suivant le principe de fonctionnement, on peut partager le débit entre plusieurs pompes placées en parallèle ou répartir la hauteur manométrique entre plusieurs rotors placés en série.

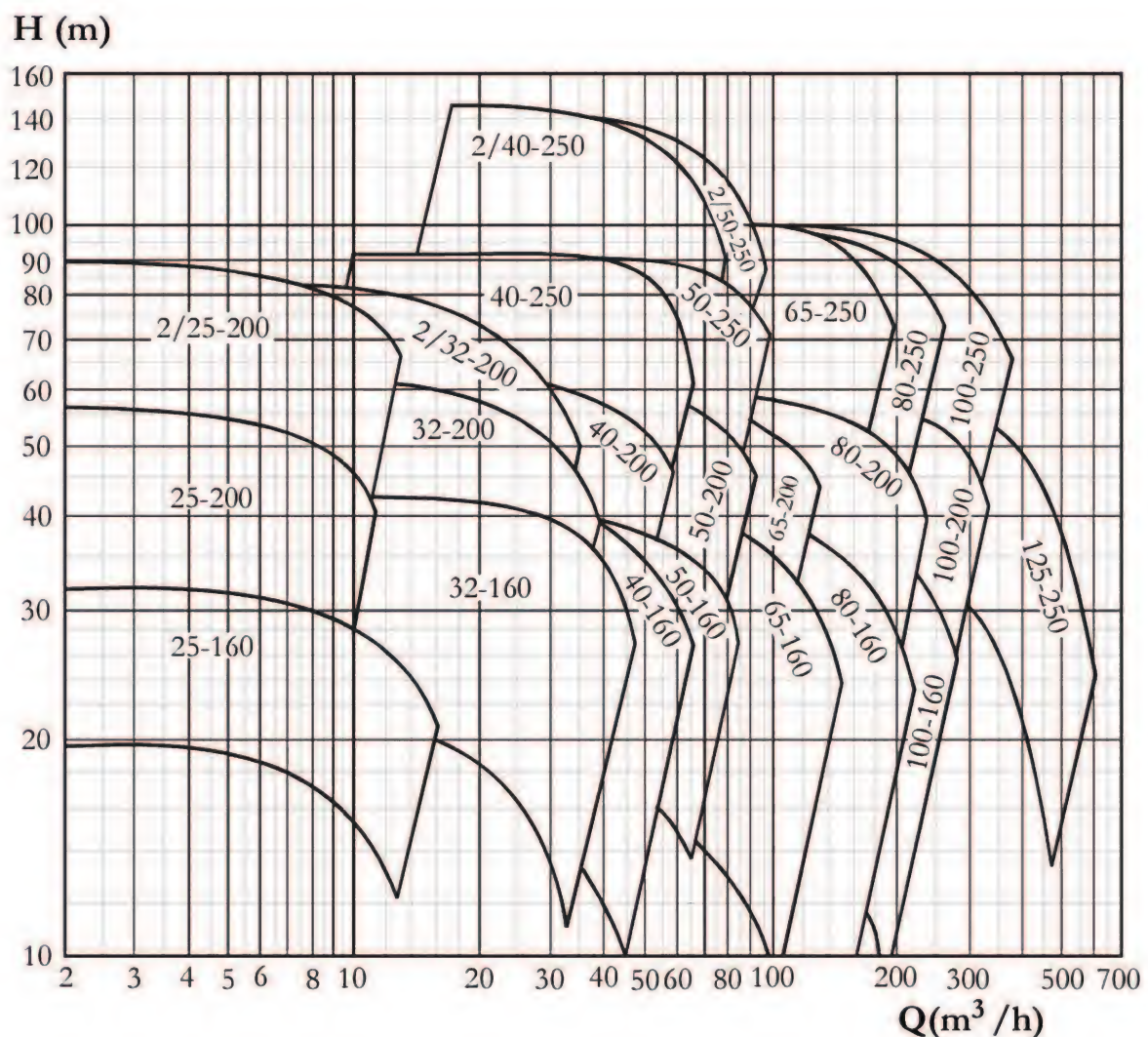


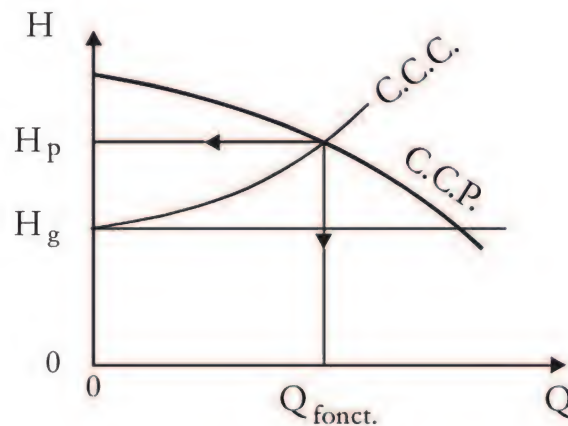
Fig. 3.32 Puissance des pompes à volute PN 10

Adapté de Pelli (1997)



## RÉSUMÉ

- 1- Le fonctionnement d'une pompe se trouve en superposant la courbe caractéristique de la conduite à la courbe caractéristique de la pompe :



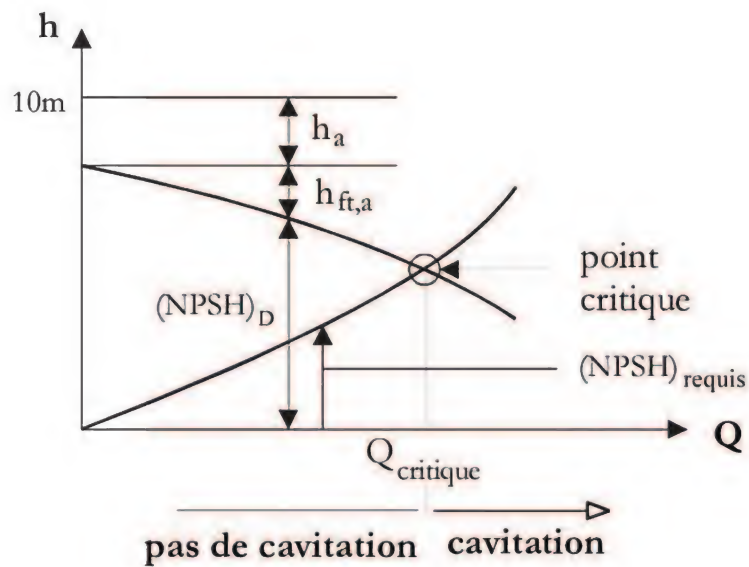
- 2- Le point de fonctionnement ainsi trouvé peut être ajusté pour diminuer le débit sans trop affecter le rendement en utilisant les règles de similitude suivantes :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \qquad \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^3$$

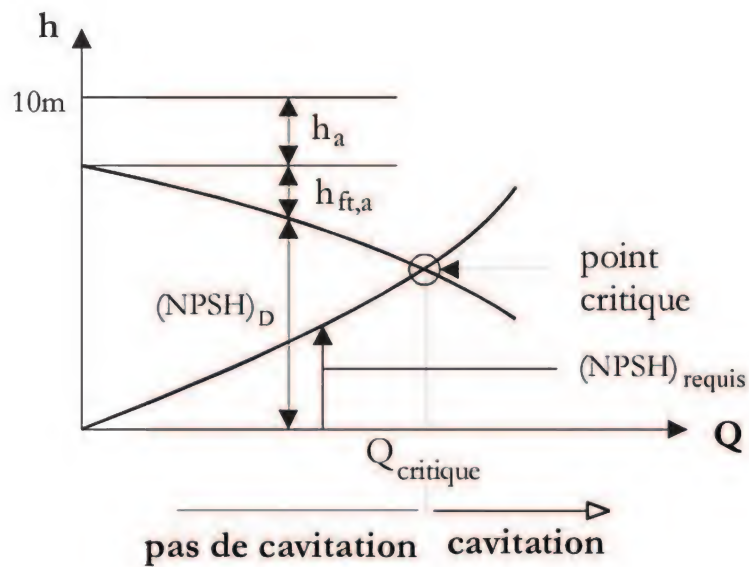
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \qquad \frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \qquad \frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4$$

- 3- Pour éviter la cavitation dans les pompes centrifuges, il faut que le  $(NPSH)_{\text{disponible}}$  soit supérieur au  $(NPSH)_{\text{requis}}$ . Graphiquement ceci se traduit par :





- 4- Lorsque des pompes sont placées en série, le débit qui les traverse est le même et la hauteur manométrique équivalente est la somme des hauteurs manométriques développées par chacune des pompes.
- 5- Lorsque des pompes sont placées en parallèle, elles développent toutes la même hauteur manométrique. Le débit total transporté est la somme de tous les débits.



- 4- Lorsque des pompes sont placées en série, le débit qui les traverse est le même et la hauteur manométrique équivalente est la somme des hauteurs manométriques développées par chacune des pompes.
- 5- Lorsque des pompes sont placées en parallèle, elles développent toutes la même hauteur manométrique. Le débit total transporté est la somme de tous les débits.

## EXERCICES

### Exercice 3.1

Quel genre de pompe doit-on utiliser pour déplacer un débit de 50 litres/seconde à une hauteur d'élévation de 25,0m à l'aide d'un moteur ayant une vitesse de rotation de 2500 rpm?  
Quel est le rendement approximatif de cette pompe?

### Exercice 3.2

Quel genre de pompe doit-on utiliser avec un débit de 600 litres/seconde et une hauteur d'élévation de 8,0m lorsque la vitesse de rotation du moteur est de 1500 rpm?  
Quel est le rendement de cette pompe?

### Exercice 3.3

Quel genre de pompe doit-on utiliser avec un débit de 200 l/s et une hauteur d'élévation de 50,0m lorsque la vitesse de rotation du moteur est 1500 rpm?  
Quel est le rendement de cette pompe?

### Exercice 3.4

Soit une pompe dont la courbe caractéristique est donnée au tableau ci-après :

Débit (l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$H_p$ (m)		21,75	20	19	17,5	16	14	11	8
$\eta$ (%)	0	25	50	70	80	82	80	70	65

La station de pompage est installée entre deux réservoirs (figure 3.33) dont les surfaces libres présentent une dénivellation (hauteur géométrique) de 14,0m.

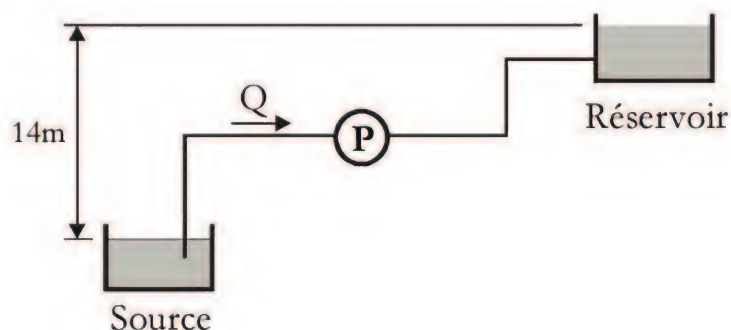


Fig. 3.33 Station de pompage entre deux réservoirs



La conduite très incrustée possède un coefficient de Hazen-Williams de 70. Elle a une longueur totale de 6,0km et un diamètre de 315mm.

Après réhabilitation par une méthode de chemisage, la conduite possède un coefficient de Hazen-Williams de 150 et un diamètre de 295mm.

Il faut déterminer le débit de fonctionnement de la pompe avant et après réhabilitation. On néglige les pertes de charge singulières.

### Exercice 3.5

On considère une station de pompage constituée de cinq pompes en parallèle. Chaque pompe a la courbe caractéristique  $h_p = 20,0\text{m} - 0,09Q^2$ .

Quelle est la courbe caractéristique de la pompe équivalente?

Quelle aurait été la courbe caractéristique équivalente si ces pompes avaient été placées en série?

### Exercice 3.6

Deux pompes identiques placées en parallèle puisent l'eau d'une source pour la refouler vers un réservoir, tel que montré sur la figure 3.33 de l'exercice 3.4. La conduite de refoulement a une longueur totale de 6,0km, un coefficient de Hazen-Williams  $C_{HW}=150$  et un diamètre  $D=0,510\text{m}$ . La courbe caractéristique de chacune des pompes est la même que celle fournie au tableau de l'exercice 3.4. On néglige les pertes de charge singulières.

- 1) Il faut trouver le débit de fonctionnement de chacune des pompes.
- 2) Il faut trouver la puissance absorbée par chacune des pompes.

### Exercice 3.7

Deux pompes identiques placées en série puisent l'eau d'une source pour la refouler vers une réserve, tel que montré sur la figure 3.34.

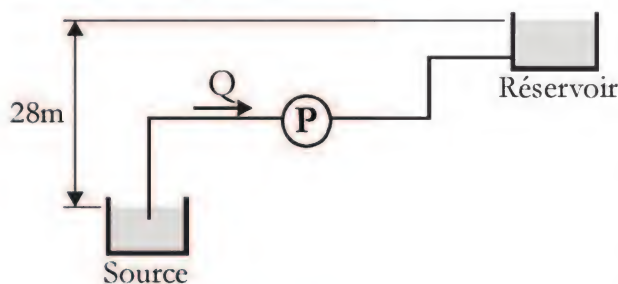


Fig. 3.34

La conduite de refoulement a une longueur totale de 6,0km, un coefficient de Hazen-Williams de  $C_{HW} = 150$  et un diamètre  $D = 0,510\text{m}$ . La courbe caractéristique de chacune des pompes est fournie sur le tableau ci-joint.

- 1) Il faut trouver le débit de fonctionnement et la hauteur manométrique de chacune des pompes.

- 2) Il faut trouver la puissance absorbée par chacune des pompes ( $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ).

Débit (l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$H_p$ (m)		21,75	20	19	17,5	16	14	11	8
$\eta$ (%)	0	25	50	70	80	82	80	70	65

## Exercice 3.8

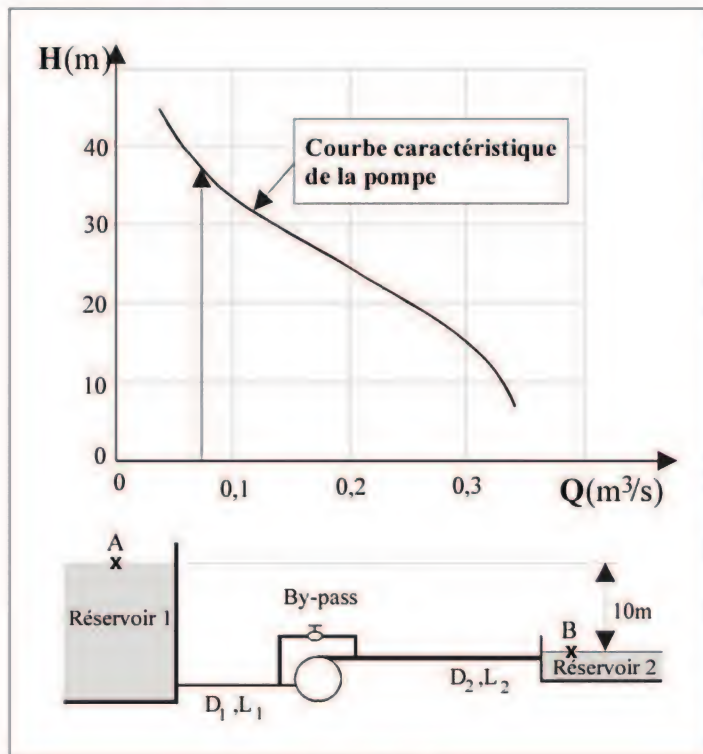


Fig. 3.35

L'écoulement entre deux réservoirs 1 et 2 peut se faire de A vers B ou de B vers A (figure 3.35). La pompe centrifuge dont la courbe caractéristique est fournie sur la figure, peut opérer dans les deux sens d'écoulement. Les deux réservoirs sont reliés par deux conduites de caractéristiques différentes.

La conduite 1 a les propriétés suivantes :

Diamètre  $D_1 = 305\text{mm}$

Longueur  $L_1 = 30,0\text{m}$

$C_{fHw1} = 140$

La conduite 2 a les propriétés suivantes :

Diamètre  $D_2 = 255\text{mm}$

Longueur  $L_2 = 350\text{m}$

$C_{fHw2} = 130$

Les pertes de charge singulières sont négligées.

Il faut évaluer par la méthode graphique le débit fourni par le système pour les 3 cas suivants :

- 1) pompe non opérante et by-pass ouvert,
- 2) pompe en fonctionnement et by-pass fermé, l'écoulement se faisant de A vers B,
- 3) pompe en fonctionnement et by-pass fermé, l'écoulement se faisant de B vers A.

## Exercice 3.9

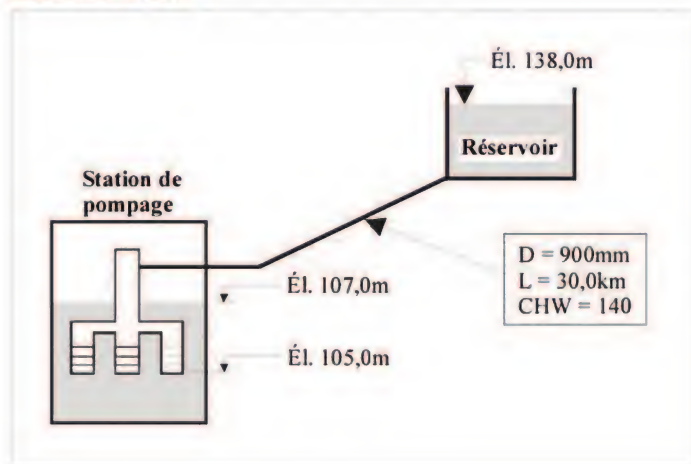


Fig. 3.36

La station de pompage de la figure 3.36 est constituée de trois pompes fonctionnant en parallèle.

Chaque pompe est constituée de trois cellules en série.

La courbe caractéristique d'une cellule type est donnée au tableau ci-après.

- 1) Quel est le débit de fonctionnement lorsque toutes les pompes sont en marche?
- 2) Y a-t-il danger de cavitation?

Q (litres/seconde)	H mètres	(NPSH) <sub>requis</sub>
0	42,0	
25	39,0	
50	36,0	
75	34,0	
100	32,0	
125	31,5	
150	31,0	
175	30,5	
200	30,0	10,4
225	29,0	10,5
250	26,0	11,3
275	23,5	12,5
300	19,5	14,3

**Courbe caractéristique d'une cellule**

### Exercice 3.10

On doit pomper un débit de  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$  à une hauteur d'élévation totale  $H_t = 120 \text{ m}$ . Le moteur a une vitesse de rotation  $N = 3600 \text{ rpm}$  ( $n_s = 2000$ ).

Quel est le nombre nécessaire de cellules?



### OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 3

Bonin, J. (1986), *Hydraulique urbaine appliquée aux agglomérations de petite et moyenne importance*, Paris, Eyrolles.

Carassik, I.J. et Worthington, Dio (1982), *Centrifugal Pumps and System Hydraulics*, *Chemical Engineering*, New York, McGraw-Hill-Edison, p. 84-105.

Dupont, A. (1988), *Hydraulique urbaine*, tome II, Paris, Eyrolles.

Pelli, T. (1997), *L'épargne énergétique dans les services d'approvisionnement en eau*, Programme d'impulsions RAVEL, Zurich, Office fédéral suisse des questions conjoncturelles.

Stephenson, D. (1981), *Pipeline Design for Water Engineering*, Londres, Elsevier.

### SYMBOLES DU CHAPITRE 3

$a$	: coefficient
$b$	: coefficient
$C_{HW}$	: coefficient de Hazen-Williams
C.C.C.	: courbe caractéristique d'une conduite
C.C.C.E.	: courbe caractéristique d'une conduite équivalente
C.C.P.	: courbe caractéristique d'une pompe
C.C.P.E.	: courbe caractéristique d'une pompe équivalente
$D$	: diamètre
$f$	: coefficient de frottement
$g$	: accélération due à la gravité
$h$	: hauteur d'élévation
$h_a$	: hauteur géométrique d'aspiration
$h_{ft,a}$	: perte de charge dans une conduite de refoulement
$h_r$	: perte de charge géométrique de refoulement
$H$	: hauteur, hauteur manométrique
$H_a$	: hauteur totale d'aspiration
$H_g$	: hauteur géométrique totale d'élévation
$H_p$	: hauteur manométrique développée par une pompe
$H_r$	: hauteur totale de refoulement
$K$	: coefficient de perte de charge
$L$	: longueur
$n$	: coefficient
$n_s$	: vitesse spécifique (nombre de Brauer)
NPSH	: charge absolue nette à l'aspiration (Net Positive Suction Head)
$P$	: puissance d'une pompe
$P_v$	: pression de vapeur
$q$	: débit
$Q$	: débit
$V$	: vitesse moyenne d'écoulement
$z$	: cote, énergie potentielle
$\eta$	: rendement
$\lambda$	: facteur d'homothétie
$\rho$	: masse volumique du liquide

# Chapitre 4

## *Coup de bélier*

### Objectifs

- 1- Cerner le phénomène de coup de bélier et connaître les conditions de son apparition.
- 2- Quantifier l'amplitude maximale des ondes de surpression et de dépression dans des conditions d'adduction et de refoulement.
- 3- Connaître l'endroit où survient l'amplitude maximale du coup de bélier et définir sa répartition le long de la conduite.
- 4- Savoir comment se transmet l'onde du coup de bélier dans les bifurcations et les changements de section.
- 5- Se familiariser avec les différents moyens de protection des conduites contre le coup de bélier



## 4.1 Introduction

Dans les trois premiers chapitres, l'écoulement a été considéré permanent et le fluide incompressible. Durant le phénomène du coup de bélier, ces hypothèses ne sont plus vérifiées. Le coup de bélier, qui génère des ondes de surpression et de dépression de grande amplitude, est un phénomène transitoire qui prend naissance lors du démarrage et de l'arrêt des pompes et des turbines ou lors de la fermeture de vannes. Durant ce phénomène, le liquide se comprime et la conduite se dilate pour absorber partiellement l'onde de choc. Avant d'analyser le phénomène du coup de bélier, rappelons brièvement les limites de compressibilité des liquides et d'élasticité des conduites.

## 4.2 Compressibilité des liquides

Les écoulements de liquides peuvent être classés en incompressibles ou compressibles selon que les variations de masse volumique et leur influence sur l'écoulement peuvent être considérées négligeables ou non.

L'effet de la température est le plus important sur la masse volumique. La masse volumique de la plupart des liquides décroît lentement à température croissante, avec un taux de variation de l'ordre de  $-0,1\%$  par degré Celsius.

Comme nous considérons l'eau à une température constante standard de  $18^\circ\text{C}$ , les variations de masse volumique ne peuvent être que le résultat de l'action de forces importantes de pression, suffisantes pour modifier la distance intermoléculaire moyenne.

Le *module d'élasticité*  $E_f$  exprime la variation de pression  $\Delta P$  requise pour produire une variation relative de la masse volumique  $\Delta\rho/\rho$  :

$$E_f = \frac{\Delta P}{\Delta\rho/\rho} \quad (4.1)$$

$E_f$  a donc les dimensions d'une pression ( $\text{N/m}^2$  ou Pa) et dépend de la température de l'eau (tableau 4.1).

Température	Masse volumique	Tension de vapeur	Module d'élasticité
$T (^{\circ}\text{C})$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$h_v \text{ (m)}$ à $4^{\circ}\text{C}$	$E_f \text{ (kN/m}^2\text{)}$
0	999,9	0,062	$1,95 \times 10^6$
4	1000,0	0,083	—
10	999,7	0,125	$2,05 \times 10^6$
20	998,2	0,239	$2,14 \times 10^6$
30	995,7	0,433	$2,16 \times 10^6$
40	992,2	0,753	$2,17 \times 10^6$
50	988,1	1,258	$2,18 \times 10^6$
60	983,2	2,033	$2,19 \times 10^6$
80	971,8	4,831	—
100	958,4	10,333	—

Tableau 4.1 Propriétés physiques de l'eau douce à la pression atmosphérique (101,3525 kPa)

Par exemple, pour l'eau à  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $E_f = 2,0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Ceci signifie que pour produire une variation de masse volumique de 0,1% ( $\Delta\rho/\rho = 0,001$ ), il faut exercer un accroissement de pression de  $2,0 \times 10^3 \text{ kPa}$ . Cela correspond à l'application d'une pression de 20 atmosphères ou encore équivaut à une colonne d'eau de 200 mètres. On ne rencontre normalement de telles pressions que lors d'un coup de bélier.

### 4.3 Élasticité des conduites

Un cas fréquent qui implique le calcul de forces de pression est celui des conduites circulaires sous pression lors d'un coup de bélier.

La surpression du coup de bélier qui vient s'ajouter à la pression résiduelle de service peut provoquer des tensions excessives dans le matériau de la conduite. Dans l'étape de conception, il faut vérifier que cette tension ( $\sigma$ ) est inférieure à la tension admissible  $\sigma_{\text{adm}}$  pour le matériau utilisé et choisir l'épaisseur et le diamètre de la conduite en conséquence.

La figure 4.1(a) montre une section droite dans une conduite de diamètre  $D$  dans laquelle la pression interne est  $p$ .

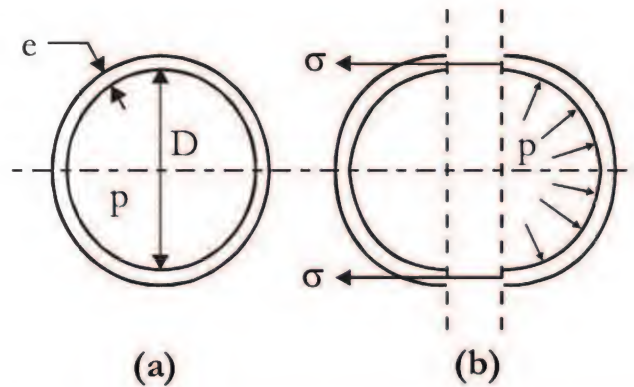


Fig. 4.1 Pression dans une conduite à section circulaire

Pour une longueur  $L$  perpendiculaire à la coupe (figure 4.1b), la traction interne dans l'épaisseur  $e$  de la paroi doit égaler la poussée exercée par le fluide sous pression sur la demi-circonférence de la paroi :

$$\sigma(2eL) = p(DL) \quad (4.2)$$

où  $\sigma$  est la tension dans le matériau de la paroi.

On déduit de (4.2) :

$$\sigma = \frac{pD}{2e} \quad (4.3)$$

Par ailleurs, la loi de Hooke permet d'écrire :

$$\varepsilon = \frac{\delta D}{D} = \frac{\sigma}{E_m} = \frac{pD}{2eE_m} \quad (4.4)$$

où  $\varepsilon$  est la déformation,  
 $E_m$  est le module d'élasticité du matériau de la paroi.

La pression  $p$  à prendre en considération est la pression normale de service majorée de la surpression du coup de bélier.



En écrivant que la contrainte  $\sigma$  doit être inférieure à la contrainte admissible pour le matériau considéré, on obtient l'épaisseur  $e$  nécessaire pour éviter la rupture :

$$e > \frac{pD}{2\sigma_{\text{adm}}} \quad (4.5)$$

*Remarque :*

Une règle de « pouce » consiste à majorer la pression normale de service de 50% pour tenir compte du coup de bélier dans une phase d'avant-projet. Les paragraphes qui suivent précisent l'importance du coup de bélier selon les circonstances.

#### 4.4 Phénomène du coup de bélier

Un changement de la vitesse d'écoulement entraîne une variation de pression dans la conduite et peut mettre en péril la tenue mécanique des machines et des réseaux. Ce changement de vitesse peut être provoqué par la fermeture rapide d'une vanne, la mise en route ou l'arrêt d'une pompe ou d'une turbine. Afin d'illustrer le phénomène du coup de bélier, considérons un réservoir fournissant un débit  $Q_0$  à une vitesse  $V_0$  dans une conduite munie à son extrémité d'une vanne de contrôle. Subdivisons la conduite en  $n$  tronçons très petits numérotés de 1 à  $n$  en partant de la vanne (figure 4.2).

Quand la vanne se ferme brusquement, le tronçon 1 voit sa vitesse passer de  $V_0$  à zéro en un temps  $\Delta t$  pratiquement nul. En accord avec la seconde loi du mouvement de Newton, on écrit :

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(V_0 - 0)}{\Delta t} = \infty$$

La force résultante et la pression tendraient vers une valeur infinie et la conduite devrait se désintégrer. Heureusement ce cas extrême ne se produit pas avec cette ampleur pour les raisons suivantes :

- 1- Le changement de vitesse ne peut pas être instantané car la fermeture de vanne requiert un certain temps.

- 2- Tel qu'exposé dans les paragraphes 4.2 et 4.3, le liquide se comprime et la paroi de la conduite se dilate pour absorber une certaine quantité d'énergie et limiter le choc.

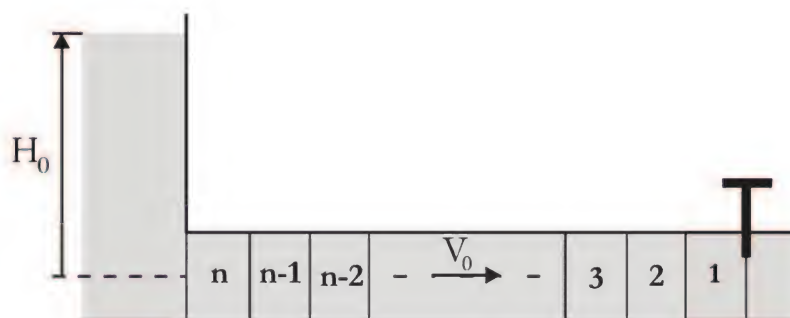


Fig. 4.2 Subdivision de la conduite

Le tronçon 1, qui est maintenant au repos, va arrêter le tronçon 2 qui voit sa pression augmenter et, de proche en proche, le phénomène se propage jusqu'au tronçon  $n$ .

Ainsi, l'augmentation de pression gagne tour à tour les tronçons 1, 2, 3, ...  $n$  qui voient successivement leur volume d'eau se comprimer et la paroi se dilater pour absorber le choc.

Il s'agit donc d'une onde de surpression qui remonte la conduite, de la vanne jusqu'au réservoir (figure 4.3 b). On peut comparer cette première phase à un carambolage qui se produit sur une autoroute. Le premier conducteur (goutte d'eau) qui frappe un original (la vanne) et s'immobilise voit les autres conducteurs, qui le suivent de près et ne respectent pas la limite de vitesse, se tamponner les uns après les autres.

À la fin de cette première phase, la pression dans le tronçon  $n$  est beaucoup plus élevée que la pression  $H_0$  dans le réservoir (figure 4.3 c). Le gradient de pression fait couler l'eau de la conduite vers le réservoir et les tronçons  $n$ ,  $n-1$ ,  $n-2$ ...  $3$ ,  $2$ ,  $1$  tour à tour se décompressent. Une onde de dépression se propage vers la vanne comme le montre la figure 4.3d. Pendant ce temps, l'eau qui est en arrière du front de l'onde est expulsée vers le réservoir tandis que la conduite se contracte et que l'eau se décomprime.



Le temps requis par le voyage aller-retour de l'onde de choc (vanne  $\rightarrow$  réservoir  $\rightarrow$  vanne) est  $2L/c$ ,  $L$  étant la longueur de la conduite et  $c$  la vitesse de propagation de l'onde dans la conduite. La vitesse  $c$  est aussi appelée « célérité ».

La figure 4.3e montre qu'au moment où l'onde de dépression arrive à la vanne fermée, toute la masse d'eau de la conduite est en mouvement vers le réservoir. L'inertie de cette masse d'eau cause alors un abaissement de la pression à la vanne, la pression devenant inférieure à la valeur de la pression statique normale.

Une troisième période d'oscillation commence avec une propagation vers le réservoir d'une onde de dépression comme l'indique la figure 4.3f. Au moment où cette onde atteint le réservoir, l'eau de la conduite est de nouveau à l'arrêt et la pression dans la conduite est inférieure à la pression due au niveau du réservoir (figure 4.3g).

L'eau envahit donc à nouveau la conduite, ce qui amorce une quatrième période d'oscillation marquée par la propagation vers l'aval d'une onde de pression qui ramène la conduite à ses conditions initiales avec un écoulement dirigé vers l'aval, à l'arrière du front d'onde (figure 4.3h). Cette période se termine à l'instant  $4L/c$ .

À ce moment précis, la conduite se trouve dans des conditions similaires aux conditions initiales à l'exception du fait que la vitesse de l'eau dans la conduite est moindre que la vitesse initiale. Cette situation résulte des pertes d'énergie dues au frottement ainsi qu'au travail de déformation du matériau de la conduite et de l'eau.

Un autre cycle, qui va lui aussi durer  $4L/c$ , commence immédiatement et de la même manière mais de façon atténuée par les pertes de charge (plus faible amplitude de pression). En fin de compte, après plusieurs cycles, les ondes meurent, l'écoulement est complètement stoppé et la pression statique règne partout.



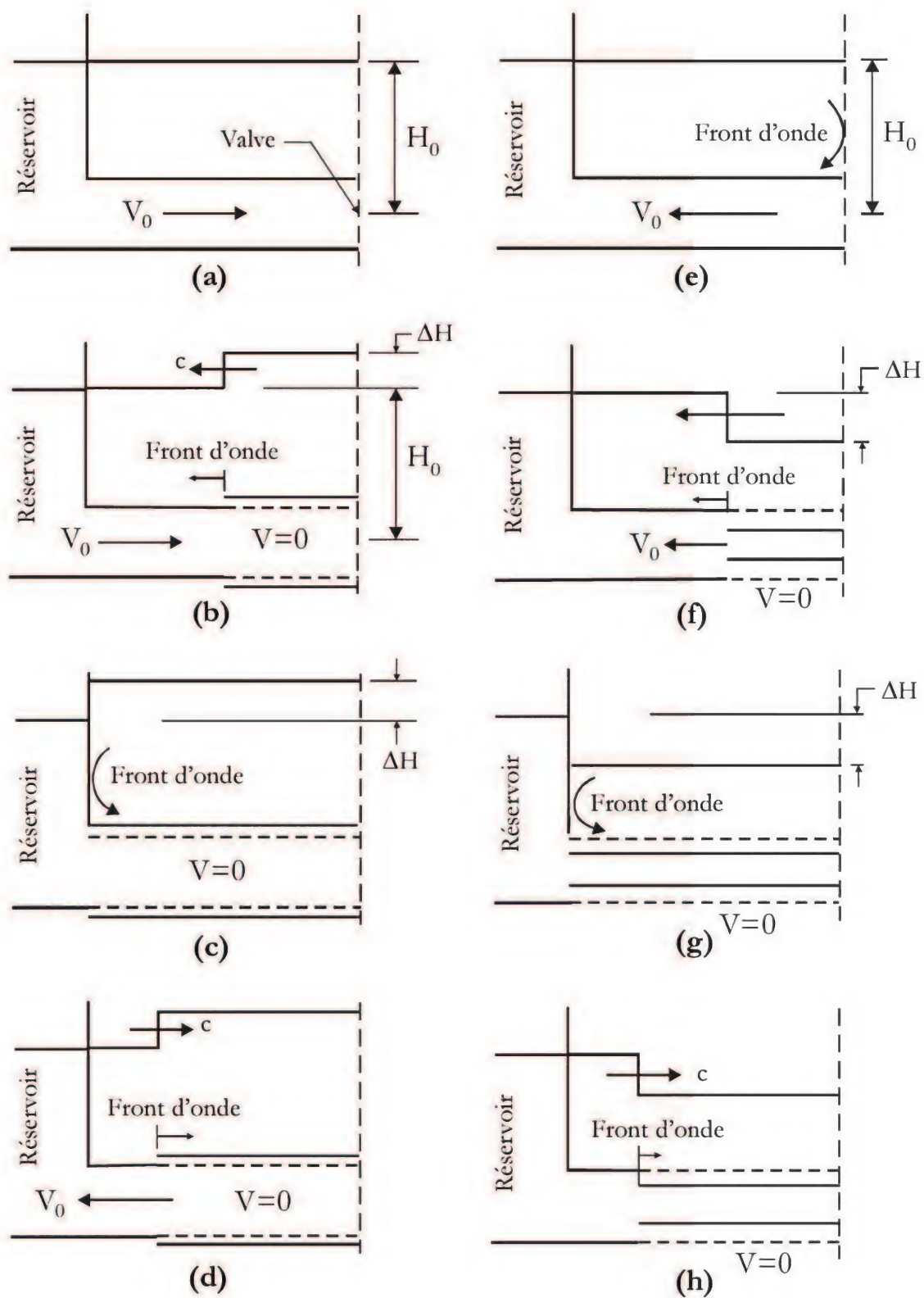


Fig. 4.3 Phases de propagation d'une onde de choc

#### 4.5 Vitesse de propagation des ondes

La célérité des ondes qui se propagent dans les conduites dépend du module d'élasticité du fluide  $E_f$  et du module d'élasticité du matériau de la conduite  $E_m$ .

On peut démontrer que la célérité  $c$  se calcule par (Robertson *et al.*, 1998) :

$$c = \left( \frac{E_c}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

$E_c$  désigne un module d'élasticité combiné pour l'ensemble conduite-fluide :

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_f} + \frac{kD}{eE_m} \quad (4.7)$$

où  $D$  et  $e$  désignent respectivement le diamètre et l'épaisseur de la paroi de la conduite

La valeur du coefficient  $k$  dépend de la méthode de fixation de la conduite :

$k = (1,25 - \epsilon)$  pour conduites à expansion longitudinale libre,

$k = (1 - \epsilon^2)$  pour conduites encastrées aux deux extrémités,

$k = (1 - 0,5\epsilon)$  pour conduites avec joints d'expansion.

$\epsilon$  désignant le module de Poisson du matériau (généralement  $\epsilon = 0,25$ )

Si les tensions longitudinales dans la conduite peuvent être négligées, cela revient au cas particulier où  $k = 1$ . Le tableau 4.1 présente des valeurs de  $E_f$  alors que des valeurs de  $E_m$  sont montrées au tableau 4.2.

Matériau	$E_m$ (kPa)
Aluminium	$7,0 \times 10^7$
Bronze, laiton	$9,0 \times 10^7$
Fonte grise	$11,0 \times 10^7$
Fonte malléable	$16,0 \times 10^7$
Béton armé	$16,0 \times 10^7$
Verre	$7,0 \times 10^7$
Cuivre	$11 \times 10^7$
Caoutchouc vulcanisé	$1,4 \times 10^7$
Acier	$20 \times 10^7$
PVC	$0,2 \times 10^7$
Polyéthylène	$0,2 \times 10^7$
Plexiglas	$0,5 \times 10^7$

Tableau 4.2 Valeurs approximatives du module d'élasticité

La figure 4.4 permet d'obtenir graphiquement cette célérité pour différents matériaux et rapports épaisseur de paroi / diamètre ( $e/D$ ).

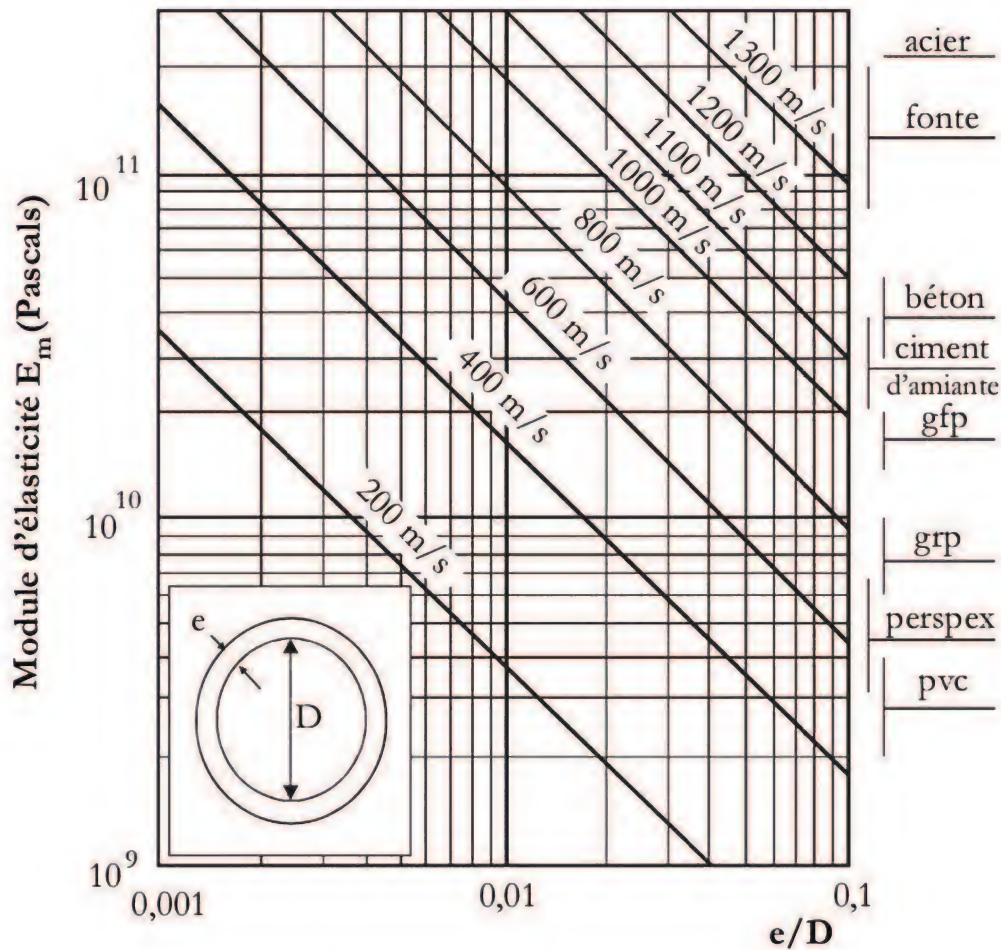


Fig. 4.4 Célérité dans les conduites

Pour l'eau à la température normale (15°C), la formule d'Allievi permet de calculer la célérité des ondes (Dupont, 1988):

$$c = \frac{9900 \text{ m/s}}{\sqrt{48,3 + r \frac{D}{e}}} \quad (4.8)$$

où D et e sont le diamètre et l'épaisseur de la conduite exprimés dans les mêmes unités,

r est une constante propre au matériau :

- r = 0,5 pour l'acier,
- r = 1,0 pour la fonte,
- r = 4,4 pour l'amiante-ciment,
- r = 5 pour le plomb et le béton.



Pour calculer la célérité dans une conduite en béton armé, le lecteur peut consulter les travaux de Kennison (1956).

Les temps de parcours des ondes sont très courts. Dans une conduite de 500m, la durée aller-retour d'une onde de coup de bélier  $2L/c$  n'est que d'une seconde pour une célérité de 1000m/s. D'une manière générale, ce temps de parcours critique pour le coup de bélier varie entre 0,1s et 100s.

Par ailleurs, on peut constater que la célérité, et par conséquent la sévérité, de la surpression du coup de bélier dépendent directement du module d'élasticité  $E_m$  pour un diamètre et une épaisseur de conduite donnés. Ainsi, la célérité de l'onde et la surpression du coup de bélier vont être beaucoup plus importantes dans une conduite en acier que dans une conduite en PVC, toutes choses étant égales par ailleurs.

### ***Application 4.1***

Il faut déterminer la célérité des ondes  $c$  dans une conduite de diamètre intérieur  $D = 0,50\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 2,0\text{cm}$ . L'eau est à une température de  $15^\circ\text{C}$ . La conduite est en béton ou en fonte.

Conduite en béton ( $r = 5$ ) :

D'après l'équation (4.8) :

$$c = \frac{9900\text{m/s}}{\sqrt{48,3 + 5 \frac{0,5}{0,02}}} = 752,9\text{m/s}$$

Conduite en fonte ( $r = 1,0$ ) :

D'après l'équation (4.8) :

$$c = \frac{9900\text{m/s}}{\sqrt{48,3 + 1 \frac{0,5}{0,02}}} = 1156,3\text{m/s}$$

## 4.6 Manœuvre instantanée

Aucune manœuvre n'est instantanée car la fermeture d'une vanne requiert toujours un certain temps que nous appellerons  $t_f$ . Cependant, si ce temps de fermeture  $t_f$  est moindre que  $2L/c$ , autrement dit, si la vanne est complètement fermée avant que la première onde déclenchée au moment de la fermeture soit revenue à la vanne, alors tout se passe comme si la vanne avait été fermée instantanément et l'amplitude de la surpression est maximale.

La valeur maximale du coup de bélier dans le cas où la durée de fermeture de la vanne est inférieure à  $2L/c$  est ainsi assimilable à celle qu'on aurait avec une fermeture instantanée. On peut démontrer que cette variation maximale de pression se calcule par l'expression suivante (Robertson *et al.*, 1998):

$$\Delta p = \rho c \Delta V \quad (4.9)$$

où  $\Delta V$  est la variation de la vitesse d'écoulement à la suite de la fermeture

Le coup de bélier exprimé en terme de hauteur de charge se présente sous la forme suivante :

$$\Delta H = \frac{c \Delta V}{g} \quad (4.10)$$

Si la fermeture de la vanne est totale et a pour but l'arrêt complet de l'écoulement, les formules (4.9) et (4.10) s'appliquent en y remplaçant  $\Delta V$  par la vitesse initiale de l'écoulement  $V_0$ .

Un calcul approché avec, par exemple,  $c = 1000\text{m/s}$  et  $V = 1\text{m/s}$ , montre que la surpression maximale de fermeture totale vaut une charge d'environ 100m d'eau. Cette surpression qui vient s'ajouter à la pression de service est considérable et peut mettre en péril une conduite déjà fragilisée par la corrosion.

Remarquons aussi que l'amplitude de l'onde de surpression est directement proportionnelle à la vitesse de l'écoulement. Quand la vitesse d'écoulement de l'eau au moment de la fermeture d'une vanne est  $2\text{m/s}$ , la surpression est égale à 200m d'eau. Si cette vitesse  $V_2 = 2\text{m/s}$  était ramenée instantanément à  $V_1 = 1\text{m/s}$ , le coup de bélier serait  $\Delta H = (c/g)(V_2 - V_1) = 100\text{m}$ . Cette surpression est identique à celle obtenue lors de l'arrêt total d'un écoulement avec une vitesse initiale  $V_0 = 1\text{m/s}$ .

En cas d'arrêt brusque, le coup de bélier est maximal près du robinet de régulation à l'extrémité de la conduite (figure 4.5).

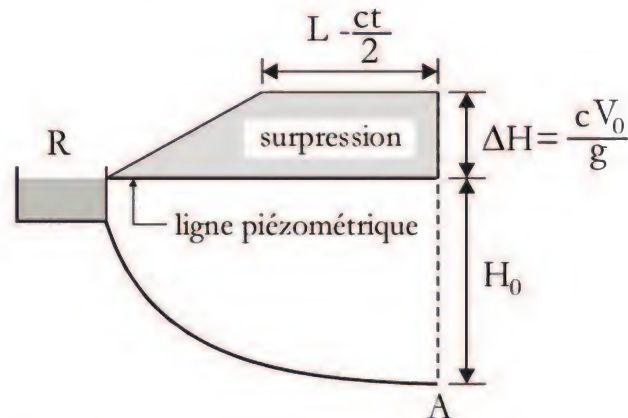


Fig. 4.5 Répartition du coup de bélier : fermeture rapide

Cette surpression maximale demeure constante sur une longueur de conduite égale à  $L - c(t_f/2)$ , puis décroît linéairement pour devenir nulle au niveau du réservoir.

#### 4.7 Manœuvre progressive

Il a été expliqué plus haut qu'une manœuvre progressive de la vanne qui cause un coup de bélier entraîne une réduction de la sévérité du phénomène si la durée de la manœuvre  $t_f$  dépasse un certain seuil, soit si  $t_f > 2L/c$ .

Le calcul des surpressions et des dépressions en divers endroits de la conduite en fonction du temps peut être effectué mais il dépasse le cadre de cet ouvrage. On peut démontrer que quand  $t_f > 2L/c$ , la pression maximale s'obtient par (Dupont, 1988) :

$$\Delta H = \frac{2LV_0}{gt_f} \quad (4.11)$$

Remarquons qu'en prenant le temps de fermeture  $t_f = 2L/c$ , cette formule donne une valeur de la surpression identique à celle obtenue lors de la fermeture brusque :



$$\Delta H = \frac{2LV_0}{gt_f} = \frac{2LV_0}{g \frac{2L}{c}} = \frac{cV_0}{g}$$

Des modèles mathématiques de manœuvres progressives ont été programmés sur ordinateur et permettent de résoudre divers cas comme par exemple celui d'une fermeture totale de vanne au bout d'une conduite connectée à un réservoir. On peut évaluer les conséquences de la variation des paramètres : l'influence de la durée de fermeture d'une vanne, l'influence du coefficient de frottement de la conduite, du type de vanne, de la vitesse d'écoulement.

Il faut noter qu'en pratique on doit calculer un temps de fermeture « efficace » pour le coup de bélier qu'on estime approximativement à 40% du temps total de fermeture. En réalité, ce temps effectif de fermeture dépend du type de vanne. Lescovich (1967) estime que ce temps efficace varie entre 39% et 65% du temps total de fermeture. En effet, la diminution du débit d'écoulement n'est pas proportionnelle à la réduction de la surface offerte à l'écoulement et dépend du type de vanne. Les dernières manœuvres de fermeture (40%) sont, en général, les plus efficaces et par conséquent les plus fatales pour le coup de bélier pour vanne-robinet (Winn, 1966 et Streeter, 1963).

En cas d'arrêt avec une manœuvre progressive, le coup de bélier décroît de façon linéaire depuis sa valeur maximale  $2LV_0/gt_f$  au niveau de la vanne, jusqu'à zéro à l'autre extrémité (figure 4.6).

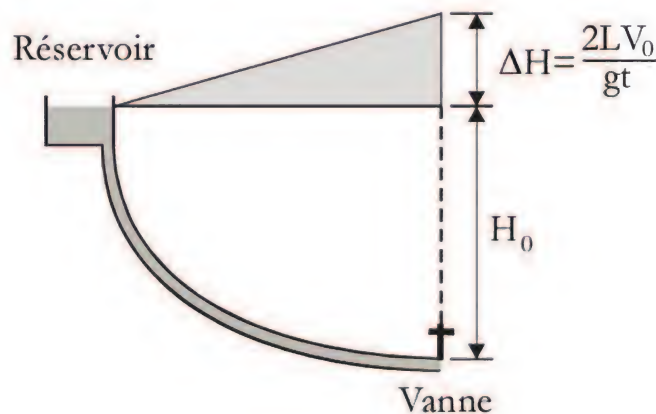


Fig. 4.6 Répartition du coup de bélier : manœuvre lente

## 4.8 Le coup de bélier dans les pompes

### 4.8.1 Généralités

Lors de l'arrêt brusque d'une pompe, il se produit un phénomène de coup de bélier similaire à celui de la fermeture d'une vanne. La différence principale est que le cycle commence par une onde de dépression près de la pompe au lieu de la surpression à côté de la vanne. Cette interruption donne lieu à un phénomène de coup de bélier qui est décrit schématiquement ci-dessous.

a) Première phase du coup de bélier direct

Lorsque la pompe s'arrête, la colonne d'eau continue son ascension grâce à son inertie. La pompe ne fournissant plus d'eau, il n'y a pas de relèvement pour combler le vide laissé par la colonne ascendante. L'onde de dépression se propage de la sortie de la pompe vers le réservoir. Dès que cette onde de dépression atteint le réservoir, une onde élastique de pression statique normale commence à se déplacer du réservoir vers la pompe.

b) Deuxième phase ou contre-coup

Une onde élastique de surpression se propage depuis la pompe jusqu'au réservoir. Elle se produit au moment où l'onde de pression normale atteint la section de la pompe. Comme précédemment, dès que l'onde de surpression atteint le réservoir, une onde de pression statique normale commence à se propager depuis le réservoir jusqu'à la pompe.

Lorsque cette onde arrive à la section de la pompe, elle provoque une nouvelle onde de coup de bélier direct et tout le phénomène décrit précédemment recommence.

Les pertes de charge par frottement dans la conduite contribuent à l'amortissement des surpressions et des dépressions jusqu'à ce que le système arrive au repos.

Chacune de ces phases a une durée  $t = 2L/c$ ,  $L$  étant longueur de la conduite et  $c$  la célérité des ondes élastiques.

Dans la phase de coup de bélier direct et suivant le profil en long de la conduite, les ondes de dépression peuvent produire de la cavitation et même des ruptures de la veine liquide (séparation de la colonne d'eau). Généralement toutefois, la cavitation provoquée dans la première phase n'est pas dangereuse en elle-même. Le remplissage des vides dans la phase de contrecoup peut au contraire



engendrer des surpressions dangereuses (c'est pendant la deuxième phase que le phénomène est semblable à la première phase de l'arrêt brusque d'une turbine).

#### 4.8.2 Arrêt instantané

Soit une conduite de refoulement où l'écoulement a une vitesse  $V_0$ . Supposons que la vitesse diminue brusquement jusqu'à la valeur  $V < V_0$ .

La dépression maximale est dans ce cas :

$$\Delta H = -\frac{c}{g}(V_0 - V) \quad (4.12)$$

Si un arrêt brusque des moteurs se produit, événement qui doit presque toujours être prévu dans le cas de moteurs électriques, on a  $V = 0$  et la dépression maximum, si aucun dispositif ne la diminue, est :

$$\Delta H = -\frac{c}{g} V_0 \quad (4.13)$$

En posant  $c = 1000\text{m/s}$ , on obtient  $h = 100V_0$ , c'est-à-dire, dans le cas de fermeture brusque, la dépression en mètres de colonne de liquide est à peu près 100 fois la valeur de la vitesse en mètres par seconde; ce qui occasionne presque toujours la rupture de la veine.

Sauf dans le cas de pompes fonctionnant sous des pressions très fortes ou lorsque la vitesse moyenne est très faible, ces dépressions sont toujours dangereuses et on doit les éviter. Toutes choses égales par ailleurs, la surpression dans la deuxième phase est du même ordre de grandeur. Cette surpression est habituellement plus dangereuse encore que la dépression.

En cas d'arrêt brusque,  $t_f \leq 2L/c$ , le coup de bélier est maximal près de la pompe (figure 4.7). Cette dépression reste constante sur une longueur égale à  $L - c(t_f/2)$  puis croît linéairement jusqu'à zéro au niveau du réservoir.

On voit que le point haut C présente un danger de cavitation. En fait, tous les points où la pression  $P/\rho g = (H_0 - cV_0/g - h)$  est plus faible que la tension de vapeur  $h_v$  fournie au tableau 4.1 présentent un danger de séparation de la colonne fluide et de cavitation lors de la première phase du coup de bélier.



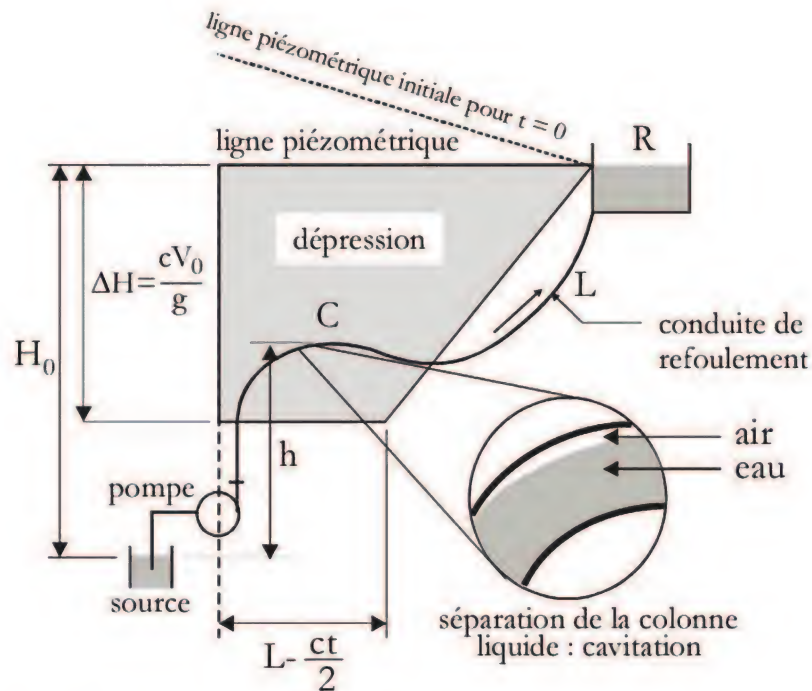


Fig. 4.7 Répartition du coup de béliér : conduite de refoulement.

Adaptation libre de Dupont (1988)

#### 4.8.3 Arrêt non instantané

Compte tenu de son inertie, le moteur couplé à la pompe continue son mouvement après l'interruption du courant électrique. Le débit d'écoulement, et donc la vitesse, ne s'annulent pas instantanément. Si le temps d'arrêt est  $t_f > 2L/c$ , on dit que l'arrêt est non instantané.

En cas d'arrêt non instantané,  $t_f \geq 2L/c$ , le coup de béliér décroît de façon linéaire depuis sa valeur maximale  $2LV_0/gt_f$  à la sortie de la pompe, jusqu'à zéro à l'autre extrémité (figure 4.8).

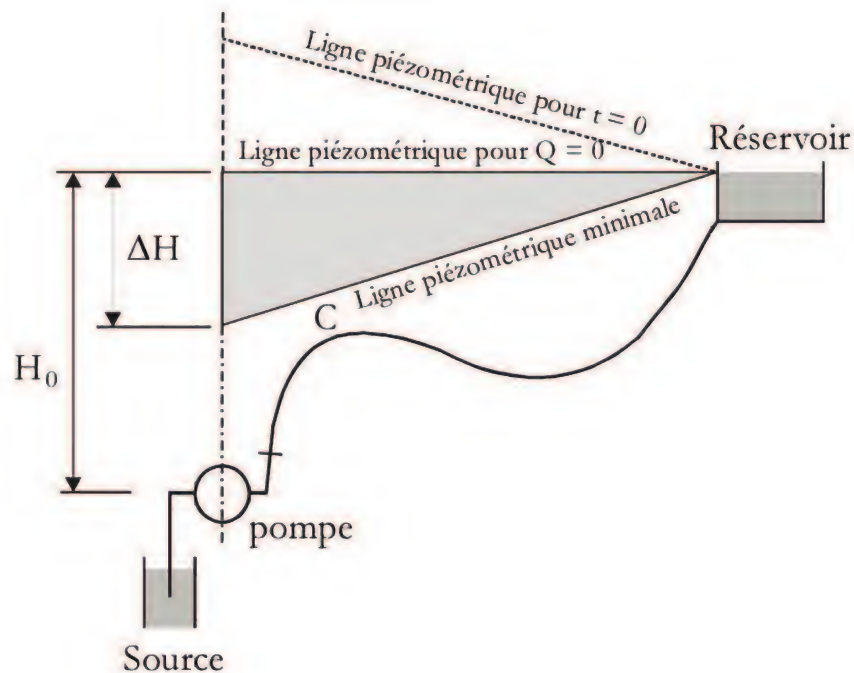
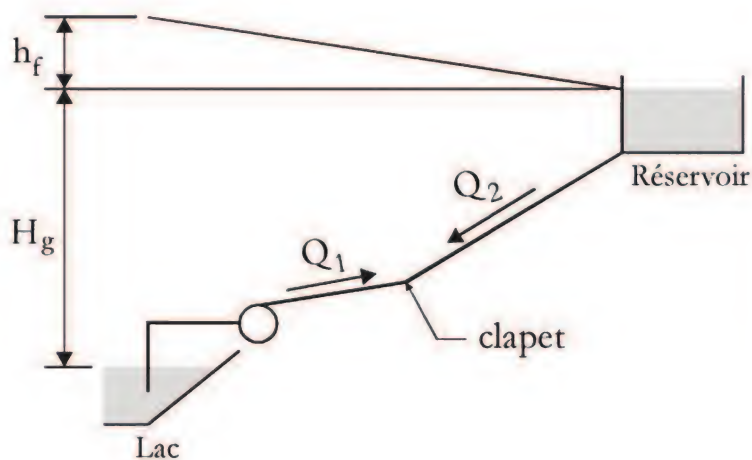


Fig. 4.8 Répartition du coup de bélier : refoulement

Comparativement au cas de la figure 4.7, on voit que le point C présente moins de danger de cavitation car la pression résiduelle y est positive.

#### 4.9 Coup de bélier dans les clapets



Le coup du clapet peut être beaucoup plus dangereux que le coup de bélier. Pour comprendre le coup du clapet, considérons une pompe puisant l'eau d'un lac pour la refouler vers un réservoir (figure 4.9).

Fig. 4.9 Clapet sur une conduite en refoulement

Désignons par  $Q_1$  le débit de pompage en fonctionnement normal.  $Q_2$  désigne le débit d'inversion en cas d'arrêt de la pompe avec un clapet qui reste ouvert. En fonctionnement normal,  $h_f$  est calculé selon (2.26) :

$$h_f = 10,675 L \left( \frac{Q_1}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

En cas d'inversion du courant, on a selon la même relation :

$$H_g = 10,675 L \left( \frac{Q_2}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

Compte tenu du fait que la hauteur géométrique  $H_g$  est généralement très supérieure à la perte de charge  $h_f$ , le débit  $Q_2$  est normalement très supérieur à  $Q_1$ .

Si au moment où le clapet arrive sur son siège, le débit d'inversion est déjà égal à  $Q$  dans une conduite de section  $A$ , le coup de béliier dans le clapet sera, selon (4.10) :

$$\Delta H = \frac{cQ}{gA} \quad (4.14)$$

Pour diminuer cette surpression, il faut que le débit d'inversion  $Q$  soit le plus faible possible et, par conséquent, que le clapet soit fermé aussi rapidement que possible à partir de l'arrêt du mouvement ascendant de l'eau. Combes (1974) démontre que le temps de fermeture du clapet doit être égal à :

$$t_f = \frac{LQ_1}{gH_g A} \quad (4.15)$$

#### 4.10 Transmission du coup de béliier

Les réseaux de distribution d'eau sont plus complexes que le cas simple d'une seule conduite considéré jusqu'à maintenant. Prenons par exemple le cas d'une bifurcation (figure 4.10).



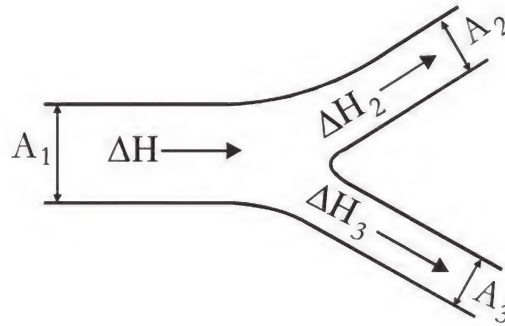


Fig. 4.10 Bifurcation de conduite

Si  $\Delta H$  est l'amplitude de l'onde qui arrive à la jonction, l'amplitude  $\Delta H_2$  de l'onde qui se propage dans la conduite 2 est :

$$\Delta H_2 = \frac{2 \frac{A_2}{c_2}}{\frac{A_1}{c_1} + \frac{A_2}{c_2} + \frac{A_3}{c_3}} \Delta H \quad (4.16)$$

De la même manière, l'amplitude de l'onde qui emprunte la conduite 3 est :

$$\Delta H_3 = \frac{2 \frac{A_3}{c_3}}{\frac{A_1}{c_1} + \frac{A_2}{c_2} + \frac{A_3}{c_3}} \Delta H \quad (4.17)$$

Dans les équations précédentes,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont les sections d'écoulement alors que  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont les célérités dans les conduites respectives.

D'une manière générale, on appelle *coefficient de transmission* dans une conduite  $i$  le rapport  $S_i$  calculé par :

$$S_i = \frac{2 \frac{A_i}{c_i}}{\sum A_i / c_i} \quad (4.18)$$

On appelle coefficient de réflexion dans une conduite i le paramètre  $r_i$  calculé par :

$$r_i = S_i - 1 = \frac{\Delta H_i - \Delta H}{\Delta H} \quad (4.19)$$

Le coefficient de réflexion exprime la différence entre l'amplitude transmise et l'amplitude incidente, rapportée à l'amplitude incidente.

Voici quelques autres exemples de transmission et de réflexion de coup de bélier :

- Conduite munie d'une vanne et partant d'un réservoir à niveau constant (figure 4.11)

Le volume d'eau dans le réservoir est considérable comparativement au volume excdantaire de détente qui coule de la conduite vers le réservoir. Comme la vitesse de l'eau et la célérité sont nulles dans le réservoir, les ondes de surpression générées lors de la phase (b) (figure 4.3) dans la conduite au niveau de la vanne ne peuvent pas être transmises à cette grande masse d'eau et sont intégralement réfléchies avec un changement de signe lors de la phase (f). Si bien que :

*du côté réservoir* : le coefficient de transmission  $S$  tend vers 0 et le coefficient de réflexion  $r = -1$ .

La figure 4.12 montre les ondes incidente et réfléchie au niveau de la vanne. Il s'agit des phases (h), (a) et (b) de la figure 4.3. Ainsi :

*du côté vanne* : le coefficient de transmission  $S = (2A_1/c_1)/(A_1/c_1) = 2$  et le coefficient de réflexion  $r = 1$ .

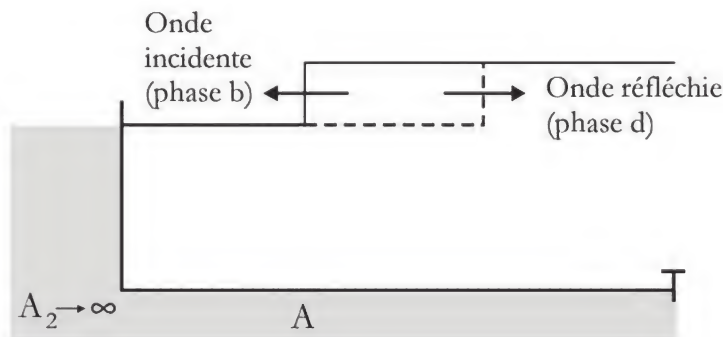


Fig. 4.11 Réservoir à niveau constant

- Élargissement d'une conduite (figure 4.12).  
Supposons par exemple que  $A_2 = 2A_1$  et  $c_1 = c_2$ .

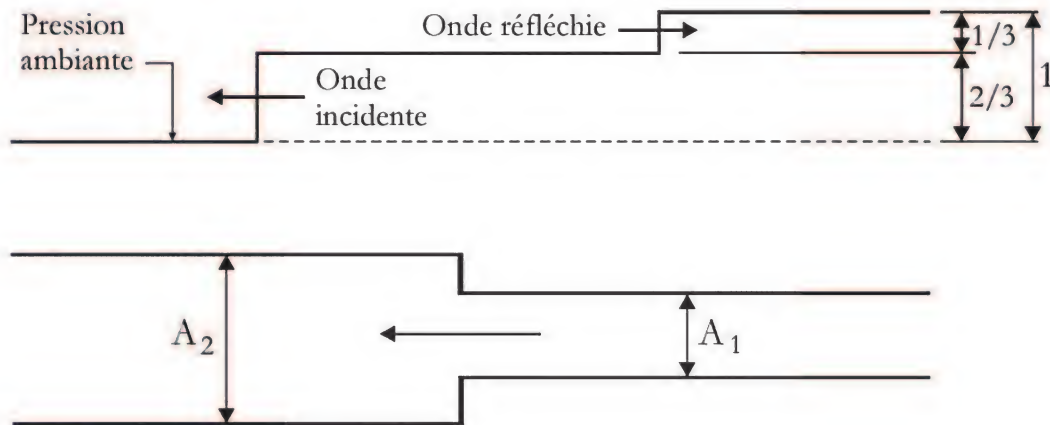


Fig. 4.12 Élargissement d'une conduite

Alors les formules (4.18) et (4.19) donnent respectivement le coefficient de transmission  $S = 2/3$  et le coefficient de réflexion  $r = -1/3$ .

- Rétrécissement d'une conduite (figure 4.13).  
Supposons encore que  $A_2 = 2A_1$  et  $c_1 = c_2$ .

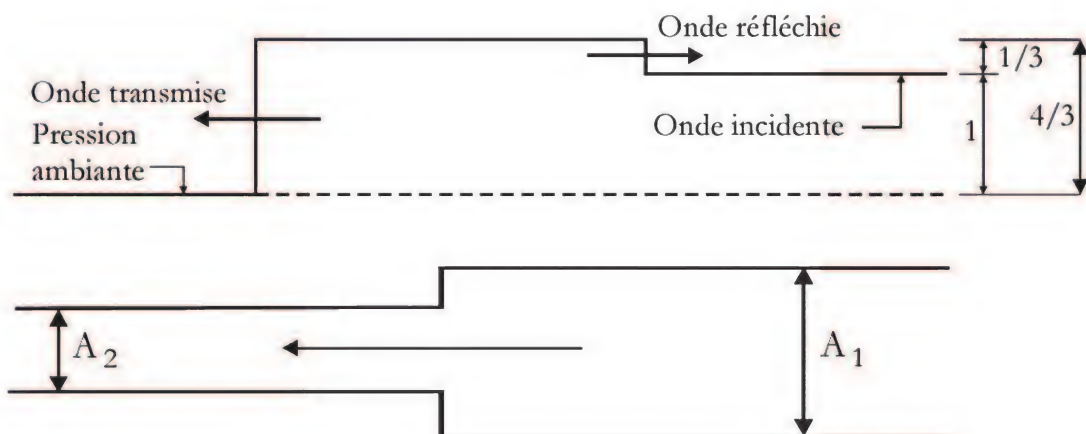


Fig. 4.13 Rétrécissement d'une conduite



Alors les formules (4.18) et (4.19) donnent respectivement  $S = 4/3$  et  $r = 1/3$ .

Le lecteur intéressé par le traitement des cas complexes peut consulter les ouvrages suivants : Streeter and Wylie (1967) et Jaeger (1977).

## 4.11 Moyens de diminuer les effets du coup de bélier

Les moyens de diminuer l'ampleur du coup de bélier sont nombreux. Le choix du moyen de protection est en fonction des caractéristiques hydrauliques de l'installation. Dans la majorité des cas, ce choix se fait entre trois solutions (Kino, 1968):

- 1) le volant d'inertie,
- 2) le réservoir hydropneumatique (réservoir d'eau),
- 3) la cheminée d'équilibre.

### 4.11.1 Volant couplé au moteur

Le volant d'inertie permet d'éviter l'arrêt brusque du moteur en augmentant l'inertie du système en mouvement. La figure 4.14 montre le schéma de principe d'un tel volant ayant les rayons interne et  $R_1$  et externe  $R_2$ .

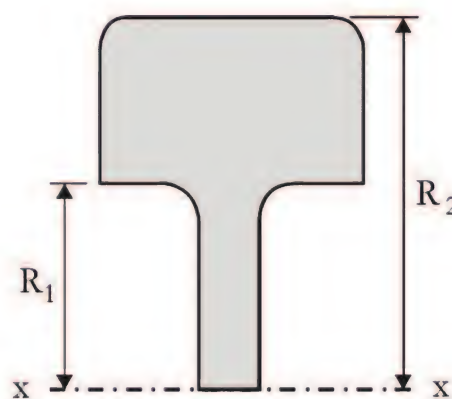


Fig. 4.14 Section du volant

Le volant, qui est calé sur l'arbre de la pompe, accumule de l'énergie cinétique durant le fonctionnement normal de la pompe. Lorsque la pompe n'est plus alimentée lors d'une panne, le volant continue de tourner grâce à son inertie. L'inertie du volant doit être suffisante pour transformer la manœuvre instantanée en manœuvre lente, c'est-à-dire qu'elle doit garantir le mouvement pendant un intervalle de temps supérieur à  $2L/c$ . D'autre part, l'inertie doit être suffisamment élevée pour que les dépressions ne dépassent pas des limites acceptables. Ce système n'est efficace que contre la dépression initiale. D'ailleurs, il n'est réalisable que pour des conduites courtes (quelques centaines de mètres). Le lecteur intéressé à obtenir plus de détails sur la conception et le fonctionnement de volants d'inertie est invité à consulter Dupont (1988).

#### 4.11.2 Réservoir d'air

De nombreuses stations de pompage destinées à élever de l'eau dans un château d'eau sont équipées d'un réservoir d'air branché sur le départ de la conduite de refoulement (figure 4.15). Il s'agit certainement du moyen le plus répandu pour protéger les conduites de refoulement simultanément contre les dépressions et les surpressions.

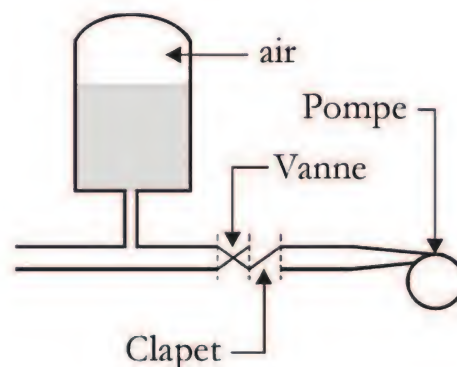


Fig. 4.15 Réservoir d'air anti-bélier

Le réservoir renferme une certaine quantité d'eau et d'air dont la pression équilibre la pression de fonctionnement normale à l'endroit où il est installé. Lors de l'arrêt brusque de la pompe, il y a une dépression à la sortie de la pompe. Le réservoir hydropneumatique, dont la pression devient plus élevée, se vide pour alimenter la conduite et limiter cette dépression.

Pendant la deuxième phase, le phénomène inverse se produit et permet la réduction des surpressions. Afin de rendre cet effet plus marqué, on interpose entre le réservoir et la conduite, une perte de charge dissymétrique, donnant lieu à une perte de charge plus élevée à l'entrée qu'à la sortie. Cet artifice peut être



réalisé par exemple au moyen d'un tube du type Borda ou un clapet avec orifice intercalé entre la conduite à protéger et le réservoir.

Les réservoirs d'air sont particulièrement indiqués pour les installations à faible débit (moins de  $1\text{m}^3/\text{s}$ ), pour des conduites de refoulement d'autant plus courtes que le débit à pomper est grand et pour des hauteurs d'élévation inférieures à 150m. Le volume des réservoirs se situe normalement entre  $0,5\text{m}^3$  et  $10\text{m}^3$ . Leur surveillance doit être assurée de façon permanente, car si l'air faisait défaut au moment d'un arrêt brusque, un accident pourrait survenir. Le lecteur intéressé par la conception et le fonctionnement des réservoirs d'air peut consulter les ouvrages de référence suivants : Ruus (1977), Gaulhet (1967), Fok (1978) et Dupont (1973 et 1988).

#### 4.11.3 Cheminée d'équilibre

Le principe de la cheminée d'équilibre (figure 4.16) est le même que celui du réservoir d'air, avec la seule différence que celle-là est ouverte à l'atmosphère. Compte tenu des hauteurs d'élévation en jeu, la cheminée d'équilibre ne convient pas généralement pour les stations de pompage, surtout en milieu urbain. Elle est principalement utilisée pour les centrales hydroélectriques. Cependant, on peut parfois l'utiliser, en combinaison avec un réservoir d'air implanté au niveau de la station de pompage, pour protéger contre la cavitation certains points hauts sur le parcours de la conduite.

Durant la période de conception, on doit déterminer la surface et la hauteur de la cheminée. Celles-ci sont calculées de telle sorte que la cheminée ne déborde pas au cours des surpressions et ne se vide pas lors des dépressions.

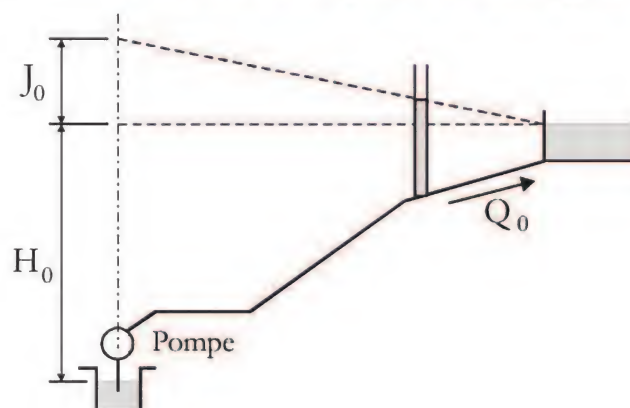


Fig. 4.16 Cheminée d'équilibre



Le lecteur intéressé par la conception et le fonctionnement des cheminées d'équilibre peut consulter les ouvrages de référence suivants : Lescovich (1966) et Roche (1975).

#### **4.11.4 Soupapes de sécurité**

Il existe dans le commerce des soupapes de sécurité anti-bélier. Le principe de fonctionnement des soupapes de décharge est de s'ouvrir pour laisser passer un certain débit dès que la pression dépasse une valeur prédéterminée. La soupape de décharge ne protège donc pas la canalisation contre les dépressions puisqu'elle ne fait pas entrer l'eau nécessaire. De plus, son emploi présente les inconvénients inhérents aux systèmes mécaniques. Ces soupapes peuvent cependant donner des résultats satisfaisants dans certains cas. Le lecteur intéressé à connaître les différents types de soupapes de sécurité peut consulter les ouvrages suivants : Lescovich (1966) et Zahid (1973).

## RÉSUMÉ

1- Célérité d'une onde de surpression ou de dépression:

$$c = \frac{9900 \text{ m/s}}{\sqrt{48,3 + r \frac{D}{e}}}$$

2- Fermeture brusque  $t_f < \frac{2L}{c}$

Adduction : Surpression max. =  $\frac{cV_0}{g}$  (charge tot. =  $H_0 + \frac{cV_0}{g}$ )

Surpression constante sur une longueur  $\left(L - \frac{ct_f}{2}\right)$  à partir de la vanne, puis décroît linéairement à 0 au niveau du réservoir.

Refoulement : Dépression max. =  $-\frac{cV_0}{g}$  (charge tot. =  $H_0 - \frac{cV_0}{g}$ )

Dépression constante sur une longueur  $\left(L - \frac{ct_f}{2}\right)$  à partir de la sortie de la pompe, puis croît linéairement à 0 au niveau du réservoir.

2- Fermeture lente

Adduction : Surpression max. =  $2 \frac{LV_0}{gt_f}$

Valeur maximale à la vanne et décroît linéairement à 0 à l'arrivée au réservoir.

Refoulement : Surpression max. =  $-2 \frac{LV_0}{gt_f}$

Valeur minimale à la sortie de la pompe puis croît à 0 au réservoir.

## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 4

Dupont, A. (1973), «Protection de la conduite de refoulement contre le coup de bélier au moment du démarrage du groupe-électro-pompes, Dimensionnement et équipement du réservoir d'air», *T.S.M. – L'eau*, p. 405-413.

Dupont, A. (1988), *Hydraulique urbaine*, tome II, Paris, Eyrolles.

Combes, G. (1974), «Les problèmes posés par les clapets antiretour et les remèdes disponibles», *Journal T.S.M. – L'eau*, n° 12, p. 595-598.

Fok, A.T. (1978), «Design Charts for Air Chamber on Pump Pipe Lines», *J. of the Hydraulic Division*, HY9, A.S.C.E., p. 1289-1303.

Gaulhet, A. (1967), «La protection des installations de pompage contre les coups de bélier d'onde», *La Houille Blanche*, n° 2, p. 169-178.

Jaeger, C. (1977), *Fluid Transients in Hydro-Electric Engineering Practice*, Londres, Blakie.

Kennison, H.F. (1956), «Surge-Wave Velocity – Concrete Pressure Pipe», *Trans. ASME*, n° 55-A-75, p. 1323-1328

Kino, H. (1968), «Water-Hammer Control in Centrifugal Pump Systems», *J. of Hydraulics*, vol. 94, HY3, A.S.C.E., p. 619-639.

Lencastre, A. (1999), *Hydraulique générale*, 2<sup>e</sup> éd., Paris, Eyrolles.

Lescovich, J.E. (1967), «The Control of Water Hammer by Automatic Valves», *J. AWWA*, mai 62, p. 632-644.

Roberson, A.J., Cassidy, J.J. et Chaudhry, M.H. (1998), *Hydraulic Engineering*, 2<sup>e</sup> éd., New York, John Wiley & Sons.

Roche, E. (1975), «Assainissement rural : protection des conduites de refoulement», *T.S.M. L'eau*, n° 8-9, p. 365-378.

Ruus, E. (1977), «Charts for Water Hammer in Pipelines With Air Chambers», *Revue canadienne de génie civil*, vol. 4, n° 3, p. 293-313.

Streeter, V.L. (1963), «Valve Stroking to Control Water Hammer», *J. Hydraulic Division*, HY2, A.S.C.E., p. 39-66.

Streeter, V.L. et E.B. Wylie (1967), *Hydraulic Transients*, New York, McGraw-Hill.

Winn, W.P. (1966), *Techniques in Water Hammer Control and Surge Suppression*

Zahid, A. (1973), «Surge Control in Water Systems», *J. Water and Sewage Works*, p. 47-50.



## SYMBOLES DU CHAPITRE 4

$A$	: section, surface
$c$	: célérité
$C_{\text{HWW}}$	: coefficient de Hazen-Williams
$D$	: diamètre
$e$	: épaisseur
$E_c$	: module d'élasticité combiné
$E_f$	: module d'élasticité du fluide
$E_m$	: module d'élasticité d'un matériau
$F$	: force
$g$	: accélération due à la gravité
$H$	: hauteur, charge hydraulique
$H_g$	: hauteur géométrique
$k$	: coefficient
$L$	: longueur
$m$	: masse
$p, P$	: pression
$Q$	: débit volumique
$r$	: coefficient de réflexion, constante
$S$	: coefficient de transmission
$t$	: temps
$t_f$	: temps de fermeture
$V$	: vitesse
$\delta$	: variation
$\Delta$	: variation
$\varepsilon$	: déformation
$\rho$	: masse volumique
$\sigma$	: contrainte normale, tension
$\sigma_{\text{adm}}$	: tension admissible



# Chapitre 5

## *Écoulements à surface libre*

### Objectifs

- 1- Savoir calculer les propriétés géométriques et hydrauliques d'un écoulement à surface libre.
- 2- Définir les critères d'optimalité de la section et d'érosion pour le dimensionnement des conduites et des canaux.
- 3- Être capable de classifier un écoulement selon son régime et la variation des propriétés géométriques et hydrauliques.
- 4- Savoir calculer la courbe de remous pour un écoulement variant graduellement.
- 5- Connaître les propriétés du ressaut hydraulique et les principes de construction d'un bassin d'amortissement.



## 5.1 Introduction

Dans un écoulement à surface libre, le liquide s'écoule au contact de l'atmosphère. La surface libre est la surface de séparation entre l'eau et l'atmosphère. En tout point de cette surface, la pression égale la pression atmosphérique.

Dans la nature, l'exemple typique d'un écoulement à surface libre est celui des rivières. En milieu urbain, l'écoulement dans une conduite d'égout pluvial et sanitaire doit normalement être à surface libre.

Une différence importante entre un écoulement en charge et un écoulement à surface libre provient de la géométrie de l'écoulement. Pour une conduite sous pression, l'écoulement occupe toute la section de la conduite qui est la plupart du temps circulaire. La section d'écoulement « A », qui ne dépend généralement que du diamètre D, se calcule alors par une relation simple ( $A = \pi D^2/4$ ). Pour un écoulement à surface libre, la géométrie de la section peut par contre être très diversifiée (circulaire, rectangulaire, trapézoïdale, ovale, triangulaire ou de forme quelconque). Dans ces cas, l'écoulement est décrit par de nouvelles propriétés géométriques dont le calcul dépend de la forme de la section et du degré de remplissage de la conduite.

Soulignons cependant qu'un écoulement en charge peut être considéré comme un état limite d'écoulement à surface libre. À titre d'exemple, l'écoulement dans une conduite d'égout combiné, qui transporte les eaux sanitaires et pluviales, se fait à surface libre en temps sec. En temps de pluie, la conduite se remplit et peut se mettre en charge à la suite de l'augmentation du débit. Les équations qui sont développées dans ce chapitre sont donc applicables à un écoulement en charge.

Les applications du présent chapitre sont nombreuses. Pour évaluer une conduite d'égout existante, l'ingénieur doit vérifier si l'écoulement se fait encore à surface libre malgré une augmentation éventuelle du débit à la suite de l'urbanisation ou de la rugosité de la conduite due au vieillissement. Pour une conduite projetée, l'ingénieur doit trouver la dimension optimale qui permet la circulation de l'eau à surface libre tout en gardant le projet économiquement rentable. Dans le cas des canaux et des rivières, l'ingénieur peut être intéressé aussi bien à connaître la vitesse d'écoulement pour protéger les berges contre l'érosion et contre le transport des sédiments qu'à déterminer le rehaussement du niveau d'eau produit en amont d'un barrage existant ou en projet de construction.

## 5.2 Classification des écoulements

Les écoulements à surface libre, comme les écoulements en charge, peuvent être permanents ou non permanents. Dans un écoulement permanent, toutes les propriétés de l'écoulement, en particulier le débit, sont constantes dans le temps. En fait, un tel écoulement n'existe pas en pratique. Cependant, l'hypothèse de la permanence de l'écoulement est souvent retenue dans les conditions suivantes :

- 1- Par souci de simplification, l'ingénieur se place volontairement dans ce contexte idéal dans l'étape de conception ou de réhabilitation,
- 2- Dans certains cas, les propriétés de l'écoulement varient lentement de telle sorte que l'hypothèse de permanence est acceptable.

Quand le débit d'écoulement varie significativement dans le temps, l'écoulement est considéré non permanent. L'exemple typique est celui de la variation du débit dans une conduite d'égout ou dans une rivière en temps de pluie. Les phénomènes non permanents sont abordés principalement dans les chapitres 7 à 10 qui traitent de l'hydrologie.

Dans les chapitres 5 et 6 qui portent sur les écoulements à surface libre, l'écoulement est systématiquement supposé permanent. Un tel écoulement peut être uniforme, variant graduellement ou variant brusquement.

Dans un écoulement uniforme, la profondeur et la vitesse d'écoulement restent constantes sur une longue distance le long de l'écoulement. Il faut alors que toutes les propriétés géométriques et hydrauliques pertinentes restent constantes le long de l'écoulement (pente, rugosité, largeur...). Il s'agit, là encore, d'un écoulement idéal qui, en toute rigueur, n'existe pas en pratique. L'hypothèse de l'écoulement uniforme est cependant souvent retenue soit par approximation soit dans un contexte de design.

Dans un écoulement variant graduellement, la profondeur et la vitesse d'écoulement varient graduellement le long de l'écoulement. Le cas typique est l'exhaussement du niveau d'eau en amont d'une retenue. L'ingénieur est alors intéressé à connaître l'effet d'un niveau d'exploitation donné de la retenue sur l'inondation des terres en amont.

Dans l'écoulement variant brusquement, la vitesse et le niveau varient d'une manière sensible et brusque sur une courte distance. L'exemple typique est celui du ressaut hydraulique qui se produit au passage d'un écoulement rapide à un écoulement lent dans le canal de fuite d'une centrale hydroélectrique.



Finalement, un écoulement uniforme ou variant graduellement peut encore être caractérisé selon son régime : il peut être fluvial, critique ou torrentiel.

La figure 5.1 résume la classification des écoulements.

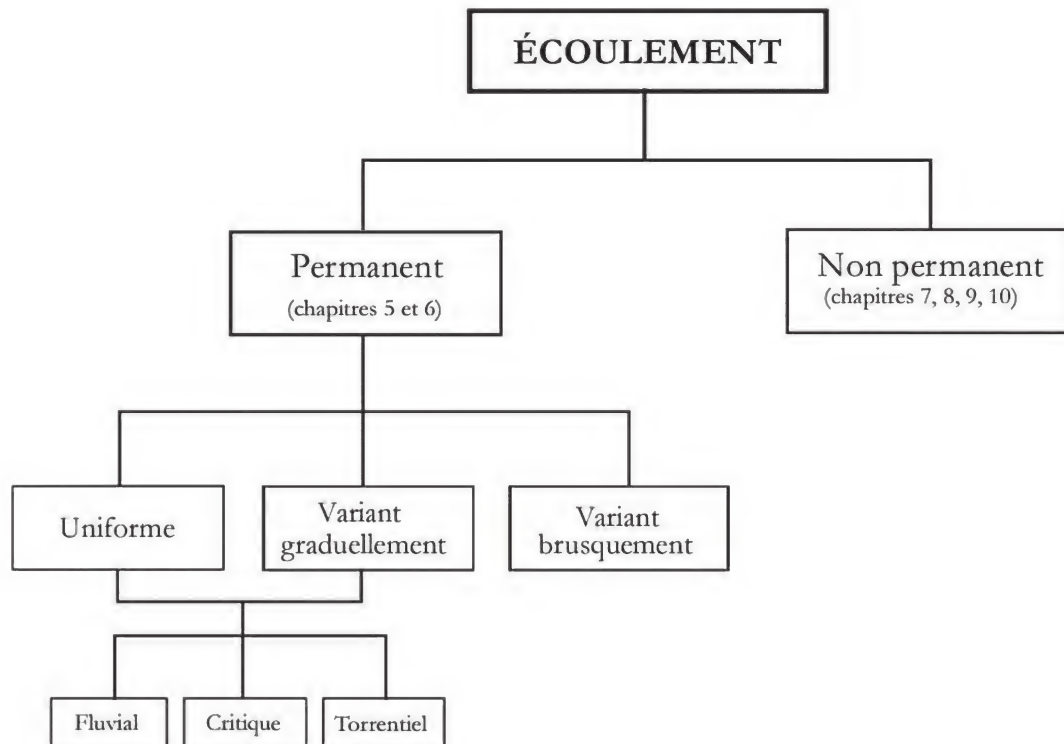


Fig. 5.1 Classification des écoulements

### 5.3 Caractéristiques géométriques des écoulements à surface libre

#### 5.3.1 Section mouillée d'un canal

La section d'un canal est la section perpendiculaire à son axe. Si le canal est de forme cylindrique ou prismatique, comme tous les cas considérés ici, l'axe du canal est parallèle à la génératrice du cylindre ou aux arêtes du prisme.

On appelle *section mouillée*  $A$  d'un canal la portion de la section du canal limitée par les parois du canal et la surface libre (figure 5.2).



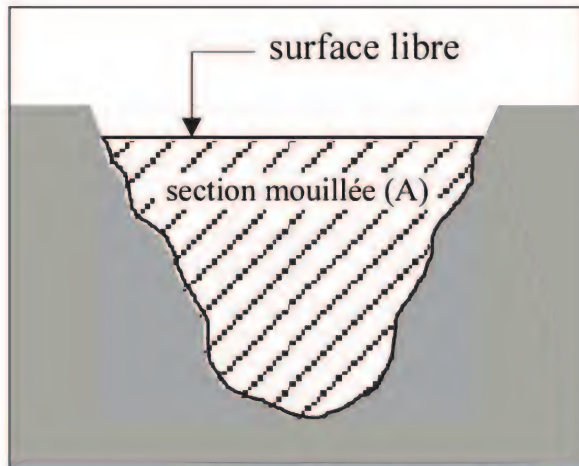


Fig. 5.2 Section mouillée d'un canal

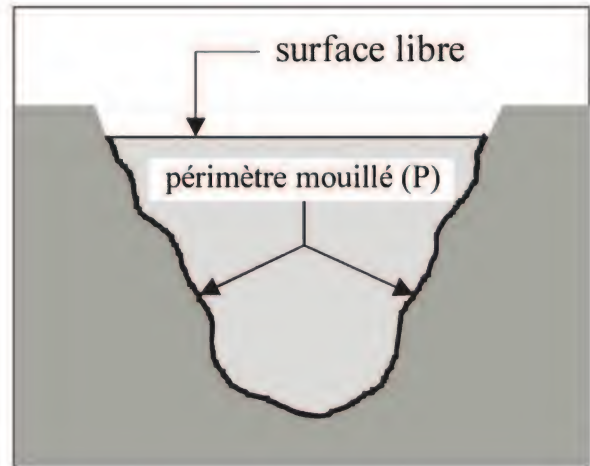


Fig. 5.3 Périmètre mouillé d'un canal

### 5.3.2 Périmètre mouillé d'un canal

On appelle *périmètre mouillé*  $P$  d'un canal, le périmètre de la section mouillée qui inclut les parois solides mais ne comprend pas la surface libre (figure 5.3).

### 5.3.3 Rayon hydraulique

On appelle *rayon hydraulique*  $R_H$  le quotient de l'aire de la section mouillée  $A$  et du périmètre mouillé  $P$  :

$$R_H = \frac{A}{P} \quad (5.1)$$

Pour une surface donnée d'écoulement, plus le périmètre mouillé est grand, plus le rayon hydraulique est faible. Comme le périmètre mouillé est une mesure de la surface de contact sur laquelle se fait le frottement, on peut interpréter le rayon hydraulique comme un indice de la performance de la section d'écoulement.

Quand la section est circulaire, il ne faut pas confondre le rayon hydraulique avec le rayon de la conduite circulaire. Quand la conduite est pleine on a, d'après (5.1), la relation suivante entre le rayon hydraulique et le rayon de la conduite :

$$R_H = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} \quad (5.2)$$

### 5.3.4 Profondeur ou tirant d'eau

On appelle profondeur d'eau la hauteur d'eau au-dessus du point le plus bas de la section perpendiculaire à l'écoulement. On la dénote souvent par  $h$  ou  $y$  (figure 5.4).

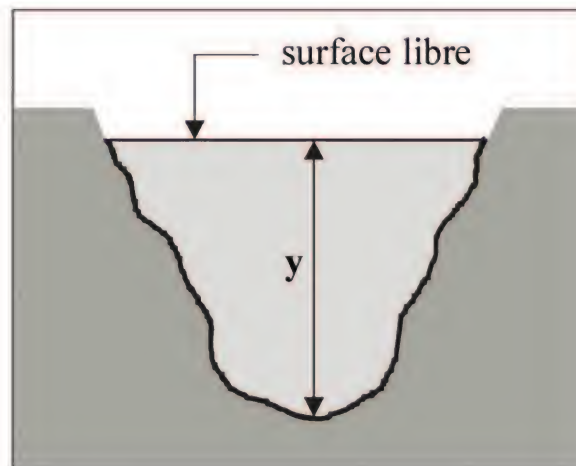


Fig. 5.4 Profondeur d'eau

### 5.3.5 Largeur au plan d'eau

La largeur de la section mouillée à la surface libre est appelée largeur au plan d'eau. On la dénote généralement par  $B$  (figure 5.5).

### 5.3.6 Largeur au radier

La largeur de la section mouillée au niveau du fond du canal est appelée largeur au radier, représentée par  $b$  (figure 5.6).

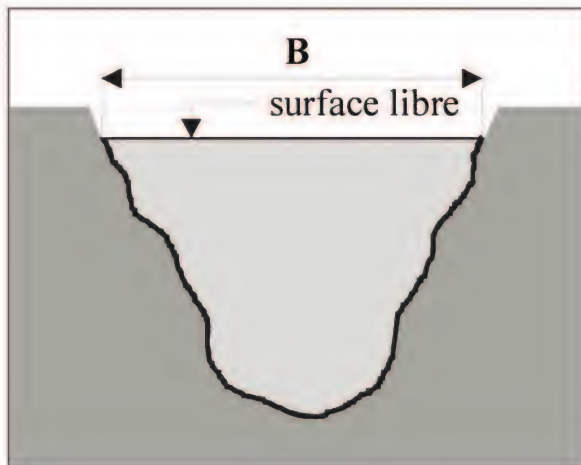


Fig. 5.5 Largeur au plan d'eau

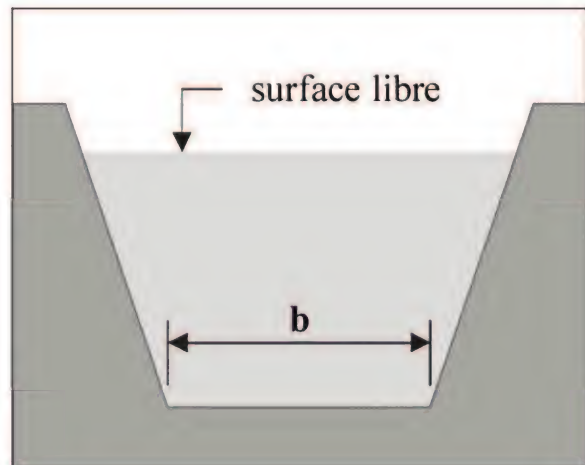


Fig. 5.6 Largeur au radier

### 5.3.7 Pente d'un canal

On définit la pente d'un canal ( $S_0$ ) comme étant la tangente de l'angle d'inclinaison du lit par rapport à l'horizontale. Comme cet angle est généralement très petit, la pente est, en pratique, numériquement égale à l'angle donné en radians.

### 5.3.8 Canal prismatique

Un canal prismatique est un canal dont la pente et la géométrie de la section restent constantes dans la direction longitudinale du canal. Lorsqu'une de ces conditions n'est pas respectée, le canal est dit non prismatique.

Le tableau 5.1 présente les caractéristiques géométriques des canaux prismatiques les plus fréquents en pratique.



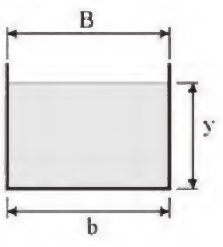
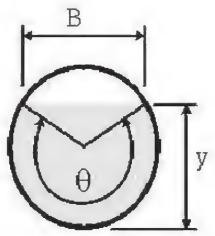
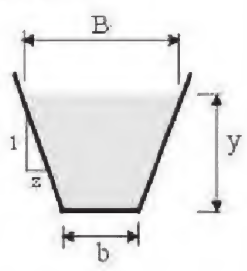
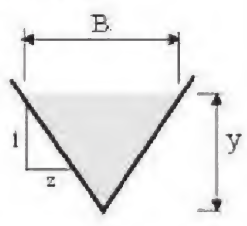
Forme de la section	Section mouillée A	Périmètre mouillé P	Rayon Hydraulique $R_H$	Largeur B
<b>rectangulaire</b> 	$by$	$b + 2y$	$\frac{by}{b+2y}$	$b$
<b>circulaire</b> 	$\frac{D^2}{8}(\theta - \sin\theta)$	$\frac{\theta D}{2}$	$\frac{D}{4} \left( 1 - \frac{\sin\theta}{\theta} \right)$	$D \sin \frac{\theta}{2}$
<b>trapézoïdale</b> 	$(b+zy)y$	$b + 2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$
<b>triangulaire</b> 	$zy^2$	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$

Tableau 5.1 Propriétés géométriques des sections courantes

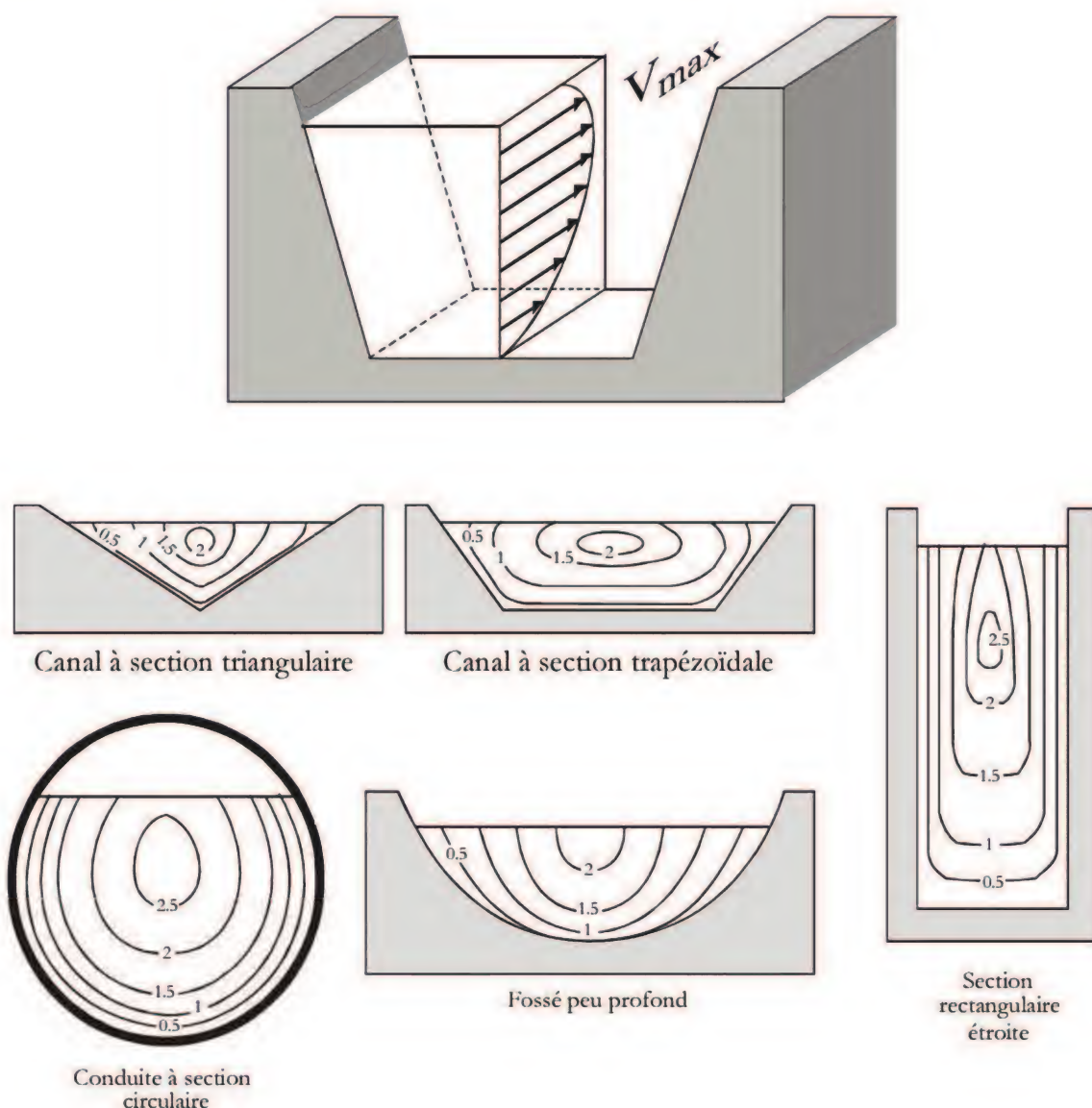
## 5.4 Vitesses et pressions dans une section d'écoulement

### 5.4.1 Répartition des vitesses

D'une manière générale, la vitesse d'écoulement est maximale au point le plus éloigné des parois où la condition d'adhérence dicte une vitesse nulle. Ainsi pour un écoulement dans une conduite circulaire pleine, la vitesse est maximale au

centre de la conduite. Dans un écoulement à surface libre, la présence d'une surface en contact avec l'air modifie cette situation. L'air produit une résistance fort différente de celle des parois solides sur l'écoulement. Pour un écoulement à surface libre, le point où la vitesse est maximale se trouve généralement en-dessous de la surface libre.

Les courbes qui représentent les points d'égale vitesse dans la section transversale sont appelées *isotaches*. La figure 5.7 montre les courbes isotaches pour les sections courantes.



**Fig. 5.7 Répartition de la vitesse dans une section**  
adapté de Chow (1988) et NF (1983)

Pour des formes géométriques composées ou complexes, il peut y avoir plusieurs maxima (figure 5.8)

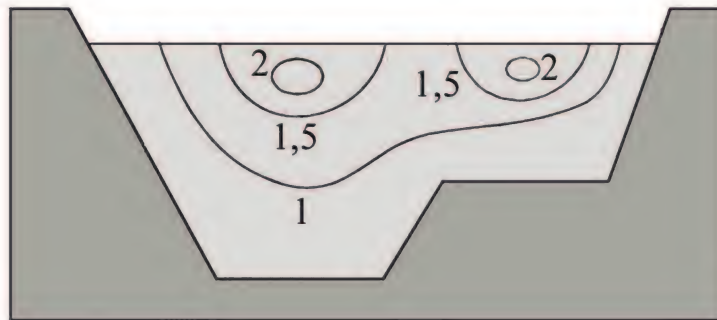


Fig. 5.8 Courbes d'égale vitesse ou isotaches

En tout état de cause, on ignore volontairement en pratique cette variation de vitesse dans la section transversale pour travailler avec la vitesse moyenne :

$$V_{\text{moy}} = \frac{\int_A v dA}{A} = \frac{Q}{A} \quad (5.3)$$

où  $Q$  est le débit d'écoulement,  
 $A$  est la section mouillée.

Quand le débit est déterminé par mesure de la vitesse à différentes profondeurs, son calcul se fait à l'aide de la formule suivante (figure 5.9) :

$$Q = \int v dA = \sum_{i=1}^n V_i \cdot A_i \quad (5.4)$$

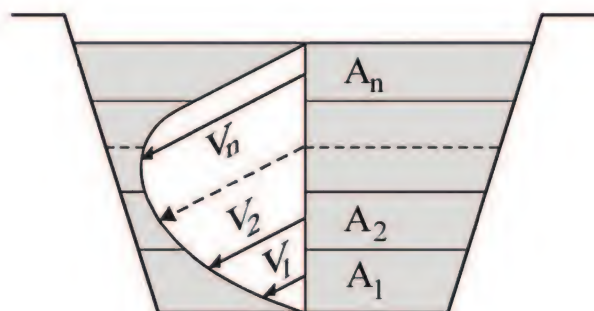


Fig. 5.9 Calcul du débit à partir des mesures de la vitesse



### 5.4.2 Répartition des pressions

La loi de l'hydrostatique nous apprend que pour un fluide de masse volumique  $\rho$ , au repos, la pression à une profondeur  $h$  se calcule par la relation :

$$P_{\text{absolue}} = \rho gh + P_{\text{atm}} \quad (5.5)$$

Pour un écoulement en charge, la loi de l'hydrostatique s'applique encore dans la direction perpendiculaire à l'écoulement tant qu'il n'y a pas de changement de direction (figure 5.10) :

$$P_2 = P_1 + \rho gh \quad (5.6)$$

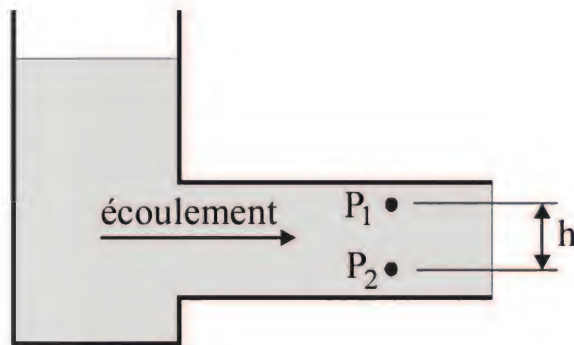


Fig. 5.10 Écoulement en charge

Qu'en est-il pour un écoulement à surface libre? Considérons un écoulement dans un canal de profondeur  $y$  dont le fond est incliné à un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. Écrivons le bilan des forces s'exerçant sur un élément prismatique de surface de base  $dA$  et de hauteur  $y$  (figure 5.11).

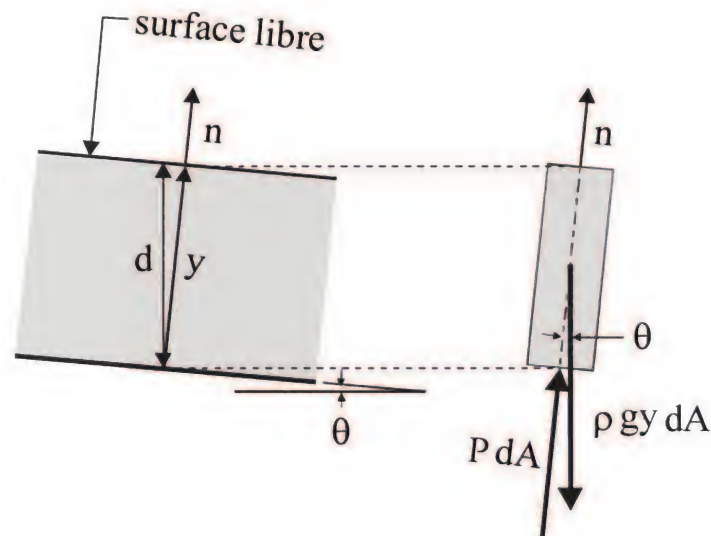


Fig. 5.11 Élément de fluide sous une surface libre

En l'absence de changement de direction dans l'écoulement, il n'y a pas d'accélération dans la direction normale à l'écoulement, si bien que la composante des forces de gravité et la force de pression le long de l'axe  $\rightarrow$  n donnent :

$$P \, dA = \rho g y dA \cos \theta \quad (5.7)$$

soit

$$P = \rho g y \cos \theta$$

Comme  $y = d \cos \theta$ , on obtient :

$$P = \rho g d \cos^2 \theta \quad (5.8)$$

Quand la pente de la conduite est 1 : 10,  $\cos^2 \theta = 0,99$ . Aussi bien les rivières naturelles que les conduites d'égout en milieu urbain ont généralement des pentes nettement inférieures à 10%, si bien qu'on écrit :

$$P = \rho g y = \rho g d \quad (5.9)$$

En conséquence, la loi de l'hydrostatique s'applique encore dans la direction perpendiculaire à l'écoulement à surface libre à condition qu'il n'y ait pas de changement de direction.

## 5.5 Équation d'énergie pour les écoulements à surface libre

### 5.5.1 Formulation générale

Comme pour les écoulements en charge, l'équation de conservation d'énergie peut s'écrire pour les écoulements à surface libre avec les notations habituelles (figure 5.12) :

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + J \quad (5.10)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de correction qui tient compte de la non-uniformité de la vitesse dans une section donnée (comme généralement  $1,04 < \alpha < 1,14$ , on suppose souvent  $\alpha = 1$ )

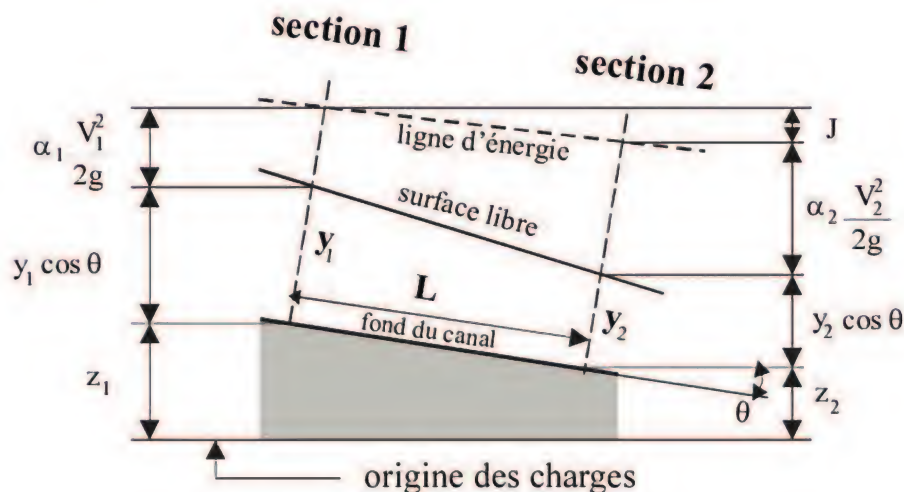


Fig. 5.12 Hauteurs de charge pour les écoulements à surface libre

### 5.5.2 Écoulement uniforme

Un écoulement est dit uniforme si les conditions suivantes sont satisfaites.

- La section d'écoulement est prismatique et l'écoulement est permanent.
- La profondeur de l'écoulement et la vitesse sont constantes le long du canal.



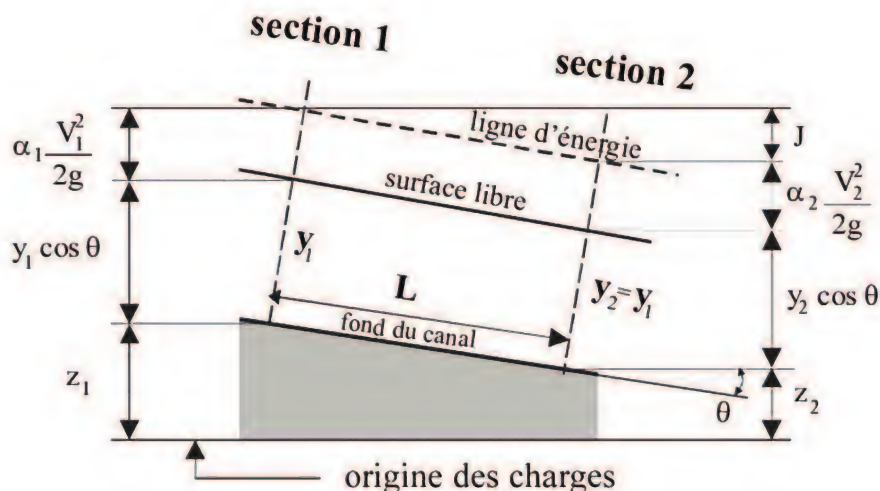


Fig. 5.13 Écoulement uniforme

En régime uniforme,  $V_1 = V_2$  et  $y_1 = y_2$  si bien que l'équation d'énergie (5.10) se réduit à  $z_1 - z_2 = J$ . Cette équation signifie qu'en écoulement uniforme, la variation de l'énergie potentielle égale les pertes de charge par frottement. En termes comptables, l'énergie disponible (gravité) égale l'énergie consommée (frottement) de telle sorte que le fluide n'accélère pas ni ne retarde.

Si les deux points considérés sont séparés par une distance  $L$  et l'angle d'inclinaison du fond du canal est  $\theta$  par rapport à l'horizontale (figure 5.13), la perte de charge par unité de longueur est :

$$S_f = \frac{J}{L} = \sin \theta \quad (5.11)$$

D'une façon générale, les canaux et rivières ont des pentes de l'ordre de quelques centimètres ou décimètres par kilomètre. On peut donc écrire  $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx S_o$ , et donc que  $S_f = S_o$  en écoulement uniforme.

Dans ces conditions, les lignes du fond du canal, de la surface libre d'écoulement et d'énergie sont toutes parallèles.

### Conclusion :

Dans un écoulement à surface libre en régime uniforme, la perte de charge par unité de longueur ou pente hydraulique de l'écoulement  $S_f$  est égale à la pente géométrique  $S_o$ . Comme  $J$  est nécessairement positif (énergie absorbée par les frottements), la relation  $S_f = S_o$  montre que le régime uniforme ne peut se produire qu'en canal descendant.

*Remarque pratique*

En pratique, que la conduite soit enfouie ou en surface, sa pente sera a priori égale à celle du terrain naturel, qui est une donnée du problème. Après avoir choisi a priori le matériau de la conduite, l'ingénieur doit calculer le diamètre économique pour véhiculer le débit de projet grâce à cette pente. Selon que cette pente soit très abrupte ou très faible, pour produire des vitesses respectivement très fortes ou très faibles d'un écoulement uniforme à surface libre, des rajustements dans le design de la conduite seront nécessaires.

Il existe plusieurs formules pour relier la perte de charge unitaire  $S_f$  aux propriétés de l'écoulement en régime uniforme. La formule la plus utilisée en Amérique du Nord est celle de Manning :

$$V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} S_f^{1/2} \quad (5.12)$$

ou, puisque  $V = Q/A$ ,

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S_f^{1/2} \quad (5.13)$$

où  $V$  est la vitesse moyenne d'écoulement en mètres par seconde,  
 $S_f$  est la pente de la ligne de charge (m/m),  
 $R_H$  est le rayon hydraulique en mètres,  
 $n$  est le coefficient de Manning.

Le coefficient de Manning «  $n$  » ne dépend que de la nature des surfaces des parois (tableau 5.2).

### 5.5.3 Divers types de problèmes posés en pratique

#### 5.5.3.1 Calcul de la profondeur normale

Lorsque l'écoulement est uniforme, la profondeur d'écoulement est appelée profondeur normale.

Cette appellation se justifie comme suit : *normalement*, si on ne perturbe pas l'écoulement par l'introduction d'une singularité quelconque, l'écoulement sera uniforme et la profondeur sera la profondeur *normale*. L'équation de Manning, sous la forme (5.12) ou (5.13), peut être utilisée directement pour calculer la profondeur normale. Cette profondeur sera comparée à la profondeur de conception pour qualifier l'adéquation de l'ouvrage. La profondeur des écoulements uniformes peut être calculée à l'aide de la figure 5.14.

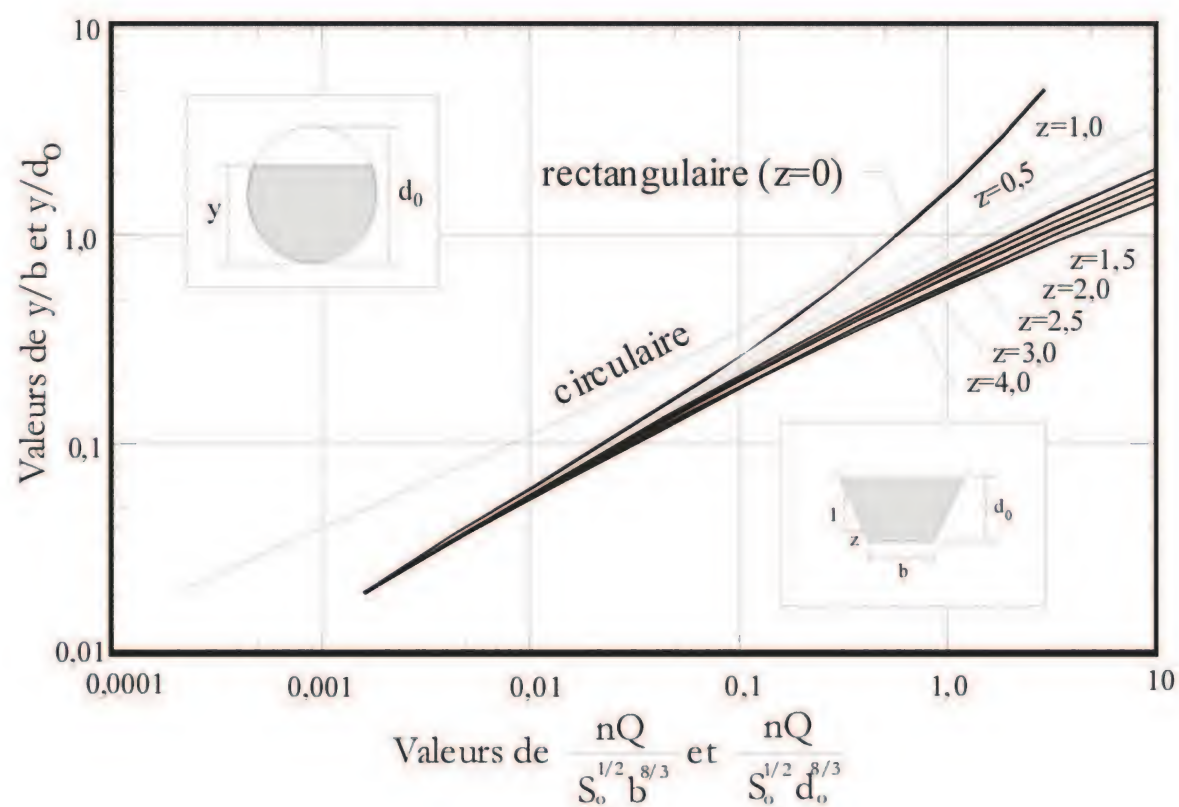


Fig. 5.14 Profondeur normale pour écoulements uniformes



Description du canal	Valeurs de n		
	minimum	normale	maximum
<b>CONDUITES FERMÉES PARTIELLEMENT PLEINES</b>			
Métalliques			
Laiton lisse	0,009	0,010	0,013
Acier soudé	0,010	0,012	0,014
Acier riveté	0,013	0,016	0,017
Fonte enduite	0,010	0,013	0,014
Fonte brute	0,011	0,014	0,016
Fer forgé	0,012	0,014	0,015
Fer forgé galvanisé	0,013	0,016	0,017
Tôle ondulée, drain inférieur	0,017	0,019	0,021
Tôle ondulée, drain pluvial	0,021	0,024	0,030
Non métalliques			
Lucite	0,008	0,009	0,010
Verre	0,009	0,010	0,013
Ciment à surface finie	0,010	0,011	0,013
Ciment : mortier	0,011	0,013	0,015
Béton : ponceau droit et propre	0,010	0,011	0,013
Béton : avec coudes, connexions et quelques débris	0,011	0,013	0,014
Béton fini	0,011	0,012	0,014
Béton : égout droit avec regards etc.	0,013	0,015	0,017
Béton non fini, coulé dans des formes d'acier	0,012	0,013	0,014
Béton non fini, coulé dans des formes en bois lisse	0,012	0,014	0,016
Béton non fini, coulé dans des formes en bois rugueux	0,015	0,017	0,020
Bois : douve	0,010	0,012	0,014
Bois : laminé, traité	0,015	0,017	0,020
Terre cuite : tuile commune de drainage	0,011	0,013	0,017
Terre cuite : égout vitrifié	0,011	0,014	0,017
Terre cuite : égout vitrifié avec regards etc.	0,013	0,015	0,017
Terre cuite : drain vitrifié avec joints ouverts	0,014	0,016	0,018
Briques émaillées	0,011	0,013	0,015
Briques enduites de mortier de ciment	0,012	0,015	0,017
Égouts sanitaires tapissés de dépôts, avec coudes et connexions	0,012	0,013	0,016
Égout pavé avec fond lisse	0,016	0,019	0,020
Maçonnerie de gravats, cimentée	0,018	0,025	0,030
<b>CANAUX CONSTRUITS OU TAPISSÉS</b>			
Surface métallique			
Acier lisse non peint	0,011	0,012	0,014
Acier lisse peint	0,012	0,013	0,017
Tôle ondulée	0,021	0,025	0,030
Surface non métallique			
Ciment fini	0,010	0,011	0,013
Ciment de mortier	0,011	0,013	0,015
Bois raboté non traité	0,010	0,012	0,014
Bois raboté, créosoté	0,011	0,012	0,015
Bois non raboté	0,011	0,013	0,015
Bois de planches	0,012	0,015	0,018
Bois tapissé de papier à toiture	0,010	0,014	0,017
Béton fini à la truelle	0,011	0,013	0,015
Béton fini	0,013	0,015	0,016
Béton fini avec fond de gravier	0,015	0,017	0,020
Béton brut	0,014	0,017	0,020
Béton : gunite, bonne section	0,016	0,019	0,023
Béton : gunite, section ondulante	0,018	0,022	0,025
Béton : sur roche excavée de bonne qualité	0,017	0,020	
Béton : sur roche excavée irrégulière	0,022	0,027	

Tableau 5.2 Valeurs du coefficient de Manning

Adapté de Chow (1988)

Description du canal	Valeurs de n		
	minimum	normale	maximum
<b>CANAUX CONSTRUITS OU TAPISÉS (suite)</b>			
Surface non métallique ((suite)			
Fond en béton, côtés en pierre taillée et mortier	0,015	0,017	0,020
Fond en béton, côtés en pierres quelconques et mortier	0,017	0,020	0,024
Fond en béton, côtés en maçonnerie de gravats plâtrée	0,016	0,020	0,024
Fond en béton, avec côtés en maçonnerie de gravats	0,020	0,025	0,030
Fond en béton, côtés en gravats ou riprap	0,020	0,030	0,035
Fond en gravier, côtés en béton placé dans des formes	0,017	0,020	0,025
Fond en gravier, côtés en pierres quelconques et mortier	0,020	0,023	0,026
Fond en gravier, côtés en gravats ou riprap	0,023	0,033	0,036
Briques émaillées	0,011	0,013	0,015
Briques dans du mortier de ciment	0,012	0,015	0,018
Maçonnerie de gravats dans le ciment	0,017	0,025	0,030
Maçonnerie de gravats	0,023	0,032	0,035
Pierre taillée	0,013	0,015	0,017
Asphalte lisse	0,013	0,013	
Asphalte rugueux	0,016	0,016	
Couverture végétale	0,030	.....	0,500
<b>CANAUX EXCAVÉS OU DRAGUÉS</b>			
En terre, droits, propres et récents	<b>0,018</b>	0,018	0,020
En terre, droits, propres, après altération climatique	<b>0,018</b>	0,022	0,025
En terre, droits, propres, gravier, section uniforme	<b>0,022</b>	0,025	0,030
En terre, droits, avec herbe courte, peu d'autre végétation	0,022	0,027	0,033
En terre, sinueux, sans végétation	0,023	0,025	0,030
En terre, sinueux, de l'herbe et quelques autres végétaux	0,025	0,030	0,033
En terre, sinueux, beaucoup de plantes aquatiques dans canaux profonds	0,030	0,035	0,040
En terre, sinueux, fond en terre, côtés en gravats	0,028	0,030	0,035
En terre, sinueux, fond rocheux, côtés couverts de végétation	0,025	0,035	0,040
En terre, sinueux, fond en cailloux, côtés propres	0,030	0,040	0,050
Canaux dragués, sans végétation	0,025	0,028	0,033
Canaux dragués, un peu de buissons sur les berges	0,035	0,050	0,060
Canaux excavés dans le roc, parois lisses et uniformes	0,025	0,035	0,040
Canaux excavés dans le roc, parois irrégulières	0,035	0,040	0,050
Canaux non entretenus, végétation dense	0,050	0,080	0,120
Canaux non entretenus, fond propre, broussailles sur les côtés	0,040	0,050	0,080
Comme précédemment, écoulement à niveau maximum	0,045	0,070	0,110
Comme précédemment, avec broussailles denses	0,080	0,100	0,140
<b>COURS D'EAU NATURELS</b>			
Cours d'eau mineurs (largeur en crue < 30m), coulant dans la plaine			
Propres, droits, sans fosses profondes	0,025	0,030	0,033
Comme précédemment, avec cailloux et végétation	0,030	0,035	0,040
Propres, avec méandres, quelques bassins	0,033	0,040	0,045
Comme précédemment, avec cailloux et végétation	0,035	0,045	0,050
Comme précédemment, avec pentes et sections moins efficaces	0,040	0,048	0,055
Comme précédemment, avec cailloux	0,045	0,050	0,060
Parties lentes, végétation, bassins profonds	0,050	0,070	0,080
Portions encombrées de végétation, bassins profonds, berges boisées	0,075	0,100	0,150
Mineurs (largeur en crue < 30m), : ruisseaux de montagne à berges escarpées			
Fond en gravier et cailloux, peu de blocs	0,030	0,040	0,050
Fond en cailloux et de grands blocs	0,040	0,050	0,070

Tableau 5.2 (suite) Valeurs du coefficient de Manning

Adapté de Chow (1988)

Description du canal	Valeurs de n		
	minimum	normale	maximum
<b>COURS D'EAU NATURELS (suite)</b>			
Bassins versants			
Pâturages sans broussailles à herbe courte	0,025	0,030	0,035
Pâturages sans broussailles à herbe longue	0,030	0,035	0,050
Champs de culture sans végétation	0,020	0,030	0,040
Champs cultivés, plantes adultes en rangées	0,025	0,035	0,045
Champs cultivés, plantes adultes non alignées	0,030	0,040	0,050
Broussailles parsemées, végétation denses	0,035	0,050	0,070
Peu de broussailles et d'arbres, en hiver	0,035	0,050	0,060
Peu de broussailles et d'arbres, en été	0,040	0,060	0,080
Broussailles moyennes à denses, en hiver	0,045	0,070	0,110
Broussailles moyennes à denses, en été	0,070	0,100	0,160
Arbres : saulaie dense, été	0,110	0,150	0,200
Arbres : terre déboisée, avec souches, sans repousse	0,030	0,040	0,050
Comme précédemment, mais avec une repousse abondante	0,050	0,060	0,080
Boisé, arbres tombés, broussailles, niveau de crue sous les branches	0,080	0,100	0,120
Comme précédemment, niveau de crue atteint le niveau des branches	0,100	0,120	0,160
Cours d'eau majeurs (largeur en crue > 30m), coulant dans la plaine			
La valeur n est moins que celle des cours d'eau mineurs de description similaire car les rives offrent une moindre résistance effective.			
Section régulière sans blocs et sans broussailles	0,025	.....	0,060
Section irrégulière et rugueuse	0,035	.....	0,100

Tableau 5.2 (suite et fin) Valeurs du coefficient de Manning

Adapté de Chow (1988)

### Application 5.1

Un canal de section rectangulaire a une largeur  $B = 6\text{m}$  et une pente de  $S_0 = 0,00010$ . Son coefficient de Manning est de  $n = 0,015$ .

De l'eau s'écoule dans ce canal à raison de  $Q = 6,0$  mètres cubes par seconde.

Il faut trouver la profondeur normale  $y$  d'écoulement dans ce canal.

Solution :

Par les équations (5.12) et (5.13) :  $Q = VA = (1/n) AR_H^{2/3} S_0^{1/2}$

$$6\text{m}^3/\text{s} = (1/0,015) 6\text{m} \cdot y [6\text{m} \cdot y / (6\text{m} + 2y)]^{2/3} 0,01$$

soit :

$$1,5 = y [6y / (6 + 2y)]^{2/3} \quad (a)$$

On peut procéder par itérations pour trouver  $y$ .

On peut aussi utiliser les courbes de la figure 5.13. En calculant  $nQ / (S_0^{1/2} b^{8/3}) = 0,075$ , on obtient  $y/b = 0,25$ , soit  $y = 1,5\text{m}$ .

On vérifie en insérant cette valeur de  $y$  dans la formule (a).



### 5.5.3.2 Calcul du débit et de la vitesse d'écoulement

Dans ce type de problèmes, on désire connaître la capacité hydraulique d'une conduite ou d'un canal dans des conditions préétablies. Le débit calculé est comparé au débit de conception pour vérifier l'adéquation de l'ouvrage face au refoulement et aux besoins en eau. Le calcul de la vitesse est nécessaire pour vérifier si cette dernière est assez élevée pour éviter la sédimentation de matières en suspension et n'est pas trop forte pour causer l'érosion. Ces calculs sont directs et ne nécessitent ni graphes ni itérations.

#### **Application 5.2**

Un canal ayant une section en forme de trapèze a une largeur au fond  $b = 5,0\text{m}$  et une pente longitudinale  $S_0 = 0,2\%$ . La pente des berges est  $Z = 1,0$ . Le coefficient de Manning est  $n = 0,02$ . Il faut calculer le débit  $Q$  d'écoulement si la profondeur d'eau ne doit pas dépasser  $y = 1,0\text{m}$ . Il faut aussi déterminer la vitesse correspondante.

D'après le tableau 5.1, pour une section trapézoïdale :

$$R_H = \frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}} = \frac{(5\text{m}+1\times 1\text{m})\times 1\text{m}}{5\text{m}+2\times 1\text{m}\sqrt{1+(1\text{m})^2}} = 0,766\text{m}$$

D'après (5.12) :

$$V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{0,02} (0,766\text{m})^{2/3} (0,002)^{1/2} = 1,87\text{m/s}$$

Cette vitesse est supérieure à la vitesse minimale pour éviter la sédimentation (environ  $0,5\text{m/s}$ ) mais elle risque d'être supérieure à la vitesse maximale qui provoque l'érosion (environ  $1,2\text{m/s}$ ). La valeur de la vitesse maximale dépend du matériau de la paroi et de la nature de l'effluent.

D'après le tableau 5.1, pour une section trapézoïdale :

$$A = (b+zy)y = (5\text{m}+1\times 1\text{m})\cdot 1\text{m} = 6,0\text{m}^2$$

Le débit est  $Q = V \cdot A = 1,87\text{m/s} \cdot 6,0\text{m}^2 = 11,23\text{m}^3/\text{s}$

### Application 5.3

Considérons une rivière à section composée, comme montrée sur la figure 5.15. La pente longitudinale moyenne est  $S_0 = 1,0 \cdot 10^{-4}$ . Le coefficient de Manning est  $n = 0,02$ .

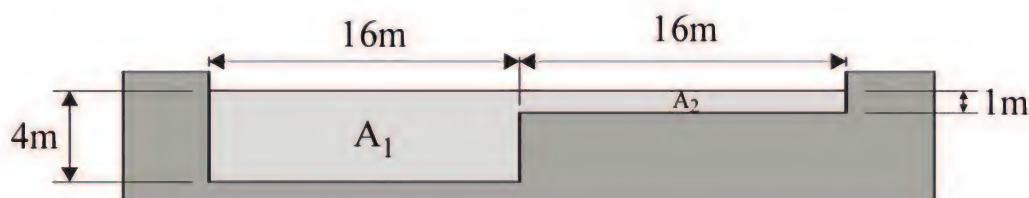


Fig. 5.15 Section composée

En période de débit normal et de petites crues, seule la section de gauche ( $A_1$ ) est occupée par l'écoulement. En période de grandes crues, l'eau envahit la banquette de droite ( $A_2$ ) et l'écoulement occupe la pleine largeur de la rivière. Il faut calculer le débit d'écoulement en utilisant les données de la figure 5.15.

Faisons d'abord les calculs directement sur la section totale :

$$A = A_1 + A_2 = (4,0\text{m} \cdot 16,0\text{m}) + (1,0\text{m} \cdot 16,0\text{m}) = 80,0\text{m}^2.$$

Le périmètre mouillé est

$$P = 4,0\text{m} + 16,0\text{m} + 3,0\text{m} + 16,0\text{m} + 1,0\text{m} = 40,0\text{m}.$$

Selon (5.1), le rayon hydraulique est

$$R_H = A/P = 80,0\text{m}^2/40,0\text{m} = 2,0\text{m}.$$

D'après l'équation de Manning (5.13) :

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{80,0\text{m}^2}{0,02} (2,0\text{m})^{2/3} (0,0001)^{1/2} = 63,5\text{m}^3/\text{s}$$

Faisons maintenant les calculs séparément pour chacune des sections.

$$A_1 = 16,0\text{m} \cdot 4,0\text{m} = 64,0\text{m}^2$$

$$P_1 = 16,0\text{m} + 4,0\text{m} + 4,0\text{m} = 24,0\text{m}$$

$$R_{H1} = A_1 / P_1 = 64,0\text{m}^2 / 24,0\text{m} = 2,67\text{m}$$

$$Q_1 = (64,0\text{m}^2/0,02) \cdot (2,67\text{m})^{2/3} \cdot (0,0001)^{1/2} = 61,53\text{m}^3/\text{s}$$

$$A_2 = 1,0\text{m} \cdot 16,0\text{m} = 16,0\text{m}^2$$

$$P_2 = 1,0\text{m} + 16,0\text{m} + 1,0\text{m} = 18,0\text{m}$$

$$R_{H2} = A_2 / P_2 = 16,0\text{m}^2 / 18,0\text{m} = 0,89\text{m}$$

$$Q_2 = (16,0\text{m}^2 / 0,02) \cdot (0,89\text{m})^{2/3} \cdot (0,0001)^{1/2} = 7,4\text{m}^3/\text{s}$$

On constate que  $Q_1 + Q_2 = 68,9\text{m}^3/\text{s} > Q = 63,5\text{m}^3/\text{s}$ .

En fait, même si la deuxième méthode de calcul ne donne qu'une valeur approchée du débit réel, elle constitue la bonne méthode à adopter.

### 5.5.3.3 Calcul des dimensions d'un canal

Il s'agit d'un problème de conception proprement dit. En effet, le plus souvent le débit est fixé par les besoins et la disponibilité de la ressource. La pente est imposée car elle égale a priori la pente du terrain de pose. La rugosité de la conduite est dictée par le choix du matériau relié au type de projet. En utilisant toutes ces données, l'ingénieur doit trouver les dimensions économiques de l'ouvrage qui respectent certaines contraintes de fonctionnement.

### **Application 5.4**

Un canal à section rectangulaire doit transporter un débit  $Q = 0,40\text{m}^3/\text{s}$  sans dépasser une profondeur  $y = 0,60\text{m}$ . Le canal, dont le coefficient de Manning est  $n = 0,016$ , est installé selon une pente  $S_0 = 0,05\%$ . Il faut déterminer la largeur minimale  $B$  que l'on doit donner à ce canal.

La section du canal est  $A = 0,60\text{m} \cdot B$ .

Le périmètre mouillé est  $P = 2 \cdot 0,60\text{m} + B$

Le rayon hydraulique est :

$$R_H = A / P = (0,60\text{m} \cdot B) / (2 \cdot 0,60\text{m} + B)$$

D'après l'équation de Manning (5.13) :

$$0,40\text{m} = \frac{B \cdot 0,60\text{m}}{0,016} \left( \frac{B \cdot 0,60\text{m}}{B + 2 \cdot 0,60\text{m}} \right)^{2/3} \cdot (0,0005)^{1/2}$$

Soit

$$0,67\text{m} = \frac{B^{5/3}}{(B + 1,2\text{m})^{2/3}}$$

On trouve par itérations :  $B = 1,1\text{m}$ .



#### 5.5.3.4 Calcul du coefficient de Manning

Plusieurs paramètres ont été introduits pour caractériser le frottement de l'eau contre les parois et par conséquent les pertes de charge. Au chapitre 2 qui traite des écoulements en charge, on a utilisé la rugosité des parois  $\varepsilon$  et le coefficient de Hazen-Williams  $C_{HW}$ .

Pour les écoulements à surface libre, l'équation de Manning (5.13) qui permet de calculer la vitesse ou le débit fait intervenir le coefficient de Manning  $n$  pour caractériser la rugosité des parois. Tous ces coefficients ne sont pas directement accessibles à la mesure, même pour des conduites neuves.

Des expériences en laboratoire ou des mesures in situ permettent de calculer la valeur de ces paramètres en mesurant simultanément toutes les propriétés hydrauliques qui apparaissent dans les équations impliquées (5.12) ou (5.13). Ceci est aussi le cas pour une conduite existante dont le vieillissement modifie la rugosité. On sait que généralement la rugosité d'une conduite augmente avec l'âge mais il est impossible de connaître, autrement que par la mesure, le coefficient de Manning actuel.

Utilisant (5.13), le coefficient de Manning est: 
$$n = \frac{A}{Q} R_H^{2/3} S^{1/2}$$

Dans le cas d'une conduite circulaire pleine, on a :

$$A = \pi D^2/4$$

et

$$R_H = D/4$$

Le coefficient de Manning s'exprime alors :

$$n = \frac{\pi D^2}{4} \left( \frac{D}{4} \right)^{2/3} \frac{S^{1/2}}{Q} = 0,3117 \frac{D^{8/3}}{Q} S^{1/2} \quad (5.14)$$

### ***Application 5.5***

Une conduite d'égout de longueur  $L = 100,0\text{m}$  et de diamètre  $D = 0,610\text{m}$  a été installée selon une pente  $S_0 = 0,075\%$ . Cette conduite véhicule un débit  $Q = 0,20\text{m}^3/\text{s}$  avec une profondeur  $y = 0,61\text{m}$ , sans aucune mise en charge.

Trente années après son installation, la conduite n'est plus capable de véhiculer le débit initial de conception sans provoquer une mise en charge  $\Delta H = 0,50\text{m}$  à son entrée.

Il faut calculer les coefficients de Manning initial et final si l'on suppose que l'écoulement à la sortie se fait toujours à surface libre et que les pertes de charge singulières sont négligeables.

Calculons d'abord le coefficient de Manning initial  $n_i$  en utilisant l'équation (5.14) :

$$n_i = 0,3117 \cdot (0,61\text{m})^{8/3} \cdot (0,00075)^{1/2} / 0,2\text{m}^3/\text{s} = 0,0114$$

Pour calculer le coefficient de Manning final  $n_F$ , il faut utiliser la pente de la ligne d'énergie  $S_f$  au lieu de  $S_0$  :

$$S_f = \Delta H / L = 0,50\text{m} / 100\text{m} = 0,005.$$

En utilisant  $S_f$  dans l'équation (5.14), on obtient le nouveau coefficient de Manning :

$$n_F = 0,3117 \cdot (0,61\text{m})^{8/3} \cdot (0,005)^{1/2} / 0,2\text{m}^3/\text{s} = 0,0295$$

On constate que le coefficient de Manning a considérablement augmenté depuis l'installation de la conduite il y a trente ans.

#### ***Remarque***

L'équation de Manning (5.13) qui a été proposée pour les écoulements à surface libre reste valable quand l'écoulement est en charge. Il suffit de remplacer dans ce cas la pente de la conduite  $S_0$  par la pente de la ligne d'énergie  $S_f = h_f / L$ .

#### ***5.5.3.5 Calcul de la pente ou de la perte de charge***

Ce calcul consiste à déterminer la pente nécessaire pour assurer le fonctionnement dans certaines conditions données d'écoulement à surface libre. Quand l'écoulement est en charge, ce calcul consiste à déterminer la ligne piézométrique. Utilisant (5.13), la pente s'exprime alors :

$$S = \left( \frac{nQ}{AR_H^{2/3}} \right)^2 \quad (5.15a)$$

Pour une conduite pleine, on peut écrire une formule pour le calcul de la pente  $S_f$  de la ligne d'énergie en se référant à l'équation (5.14) :

$$S_f = \left( \frac{nQ}{0,3117 \times D^{8/3}} \right)^2 \quad (5.15b)$$

### ***Application 5.6***

Un entrepreneur promet de corriger le problème de la conduite considérée dans l'application 5.5, en la réhabilitant par une méthode de tubage. Cette méthode consiste à introduire, à partir d'un regard, une nouvelle conduite en PVC à l'intérieur de la conduite existante. Malgré un diamètre plus petit ( $D = 0,59\text{m}$ ), l'entrepreneur prétend qu'avec un coefficient de Manning plus faible ( $n = 0,009$  pour le PVC), la mise en charge sera sensiblement diminuée. A-t-il raison?

Selon l'équation (5.15b) pour une conduite pleine :

$$S_f = \left( \frac{0,009 \cdot 0,2\text{m}^3/\text{s}}{0,3117 \cdot (0,59\text{m})^{8/3}} \right)^2 = 0,00055$$

Comme  $S_f < S_0$ , la pente de la ligne d'énergie est plus faible que la pente de la conduite et l'écoulement sera à surface libre. L'entrepreneur a donc raison.

Une autre façon de faire les calculs consiste à obtenir la nouvelle capacité de la conduite pleine mais à surface libre. Utilisant  $S_0$  dans (5.14) :

$$Q = \frac{0,3117}{0,009} (0,59\text{m})^{8/3} \cdot (0,00075)^{1/2} = 0,232\text{m}^3/\text{s}$$

La capacité de la conduite réhabilitée étant supérieure au débit de conception  $Q = 0,20\text{m}^3/\text{s}$ , la conclusion précédente est confirmée.



### 5.5.4 Cas particulier de la forme circulaire

La section de forme circulaire a retenu plus particulièrement l'attention car elle est pratiquement adoptée pour toutes les conduites de drainage fabriquées aujourd'hui. L'usage des formules du tableau 5.1 pour calculer les caractéristiques géométriques d'une conduite de section circulaire pour différents degrés de remplissage n'est cependant pas aisé. C'est pour cette raison que le tableau 5.3 et la figure 5.16 seront utilisés pour résoudre tous les types de problèmes des conduites partiellement pleines. Ce tableau et cette figure expriment la relation qui existe entre la fraction de remplissage de la conduite  $y/D$  et les autres propriétés géométriques ( $A/A_p$  et  $R_H/R_{Hp}$ ) et hydrauliques ( $V/V_p$  et  $Q/Q_p$ ).

$\frac{y}{D}$	$\frac{A}{A_p}$	$\frac{R_H}{R_{Hp}}$	$\frac{V}{V_p}$	$\frac{Q}{Q_p}$
0,05	0,0187	0,1302	0,2569	0,0048
0,10	0,0520	0,2541	0,4011	0,0209
0,15	0,0941	0,3715	0,5168	0,0486
0,20	0,1424	0,4824	0,6151	0,0876
0,25	0,1955	0,5865	0,7007	0,1370
0,30	0,2523	0,6838	0,7761	0,1968
0,35	0,3119	0,7740	0,8430	0,2629
0,40	0,3735	0,8569	0,9022	0,3370
0,45	0,4346	0,9323	0,9544	0,4165
0,50	0,5000	1,0000	1,0000	0,5000
0,55	0,5635	1,0595	1,0393	0,5857
0,60	0,6265	1,1105	1,0724	0,6718
0,65	0,6880	1,1526	1,0993	0,7564
0,70	0,7476	1,1849	1,1198	0,8372
0,75	0,8045	1,2067	1,1335	0,9119
0,80	0,8576	1,2167	1,1397	0,9775
0,85	0,9059	1,2131	1,1374	1,0304
0,90	0,9480	1,1921	1,1243	1,0658
0,95	0,9813	1,1458	1,0950	1,0745
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tableau 5.3 Propriétés géométriques et hydrauliques d'une conduite coulant partiellement pleine

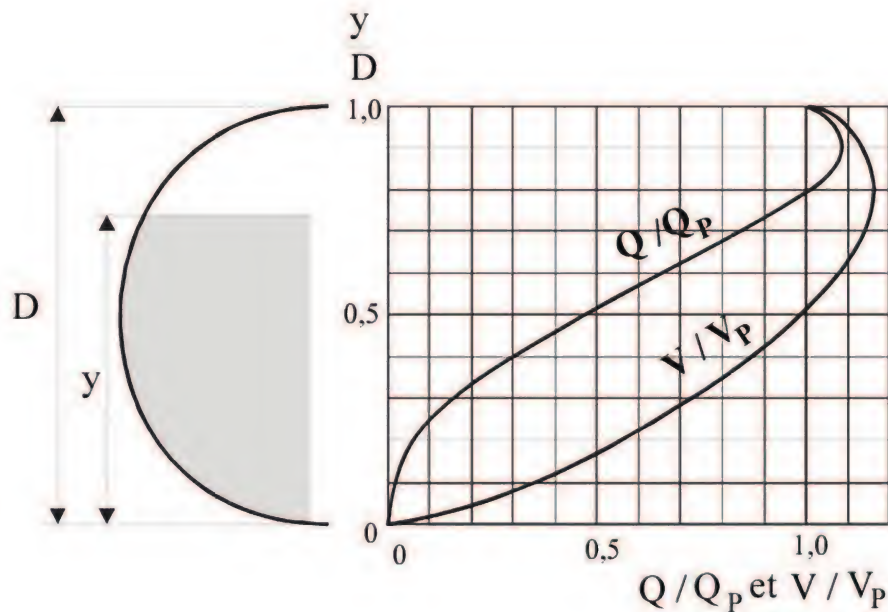


Fig. 5.16 Vitesse et débit d'écoulement dans une conduite de section circulaire partiellement pleine

Toutes les propriétés sont normalisées par rapport aux caractéristiques de la conduite pleine (indiquées par l'indice p) qui sont faciles à calculer. En effet :

$A_p = \pi D^2/4$ ,  $R_{Hp} = D/4$  et par (4.12) et (4.13) on peut écrire :

$$V_p = \frac{0,3969}{n} D^{2/3} S_f^{1/2} \quad (5.16)$$

et

$$Q_p = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} S_f^{1/2} \quad (5.17)$$

*Remarque :*

Le tableau 5.3 et la figure 5.16 ont été réalisés en supposant que le coefficient de Manning reste constant quand la profondeur et le débit d'écoulement varient. En réalité, ceci n'est pas le cas et il y a moyen de prendre en considération cette variation dans la relation entre le degré de remplissage et les propriétés hydrauliques ( $V$  et  $Q$ ).

### ***Application 5.7***

Une conduite d'égout de longueur  $L = 100\text{m}$  et de diamètre  $D = 0,59\text{m}$  a été installée selon une pente  $S_0 = 0,075\%$ . Cette conduite, dont le coefficient de Manning est  $n = 0,009$ , doit drainer un débit  $Q = 0,20\text{m}^3/\text{s}$ . Il faut calculer la profondeur d'eau et la vitesse d'écoulement.

(Note : les données sont identiques à celles de l'application 5.5).

On commence par calculer  $V_p$  et  $Q_p$  par les relations (5.16) et (5.17), en utilisant  $S_0$  :

$$V_p = \frac{0,3969}{0,009} (0,59\text{m})^{2/3} (0,00075)^{1/2} = 0,85\text{m/s}$$

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,009} (0,59\text{m})^{8/3} (0,00075)^{1/2} = 0,232\text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{Donc } Q/Q_p = 0,2\text{m}^3/\text{s} / 0,232\text{m}^3/\text{s} = 0,861$$

Par interpolation linéaire sur le tableau 5.3 on trouve:

$$\begin{array}{ll} y/D = 0,716, & \text{soit } y = 0,422\text{m} \\ V/V_p = 1,123, & \text{soit } V = 0,956\text{m/s} \end{array}$$

#### **5.5.5 Règles pratiques de dimensionnement des canaux**

Pour choisir les dimensions et la pente d'un canal ou d'une galerie en fonction de conditions d'écoulement spécifiées, on admet que l'écoulement est uniforme.

Pour effectuer les calculs, on dispose de deux équations :

- l'équation de calcul du débit  $Q = V \cdot A$ ,
- l'équation de Manning.



Avant d'accepter le choix final des dimensions d'un canal, il faut vérifier si la vitesse normale d'écoulement n'est ni trop petite pour produire la sédimentation des matières en suspension, ni trop grande pour causer l'érosion des parois.

Les vitesses d'écoulement recommandées dépendent de la nature des parois et du fond, ainsi que de la charge solide éventuelle que l'eau doit transporter sans déposition. Le tableau 5.4 fournit l'ordre de grandeur de la vitesse admissible en fonction de la nature des berges et des caractéristiques de l'effluent. Le lecteur intéressé par plus de détails, peut consulter des ouvrages spécialisés.

Matériau	n	Vitesse admissible (m/s)	
		Eau claire	Eau chargée de silts colloïdaux
Sable fin sans colloïdes	0,02	0,45	0,75
Terre sableuse non colloïdale	0,02	0,55	0,75
Terre silteuse non colloïdale	0,02	0,60	0,90
Silts alluvionnaires non colloïdaux	0,02	0,60	1,1
Terre organique lourde	0,02	0,76	1,1
Cendres volcaniques	0,02	0,76	1,1
Argile durcie très colloïdale	0,025	1,15	1,5
Silts alluvionnaires colloïdaux	0,025	1,15	1,5
Schistes argileux	0,025	1,85	1,85
Graviers fins	0,02	0,75	1,5
Terre caillouteuse non colloïdale	0,03	1,15	1,5
Silts caillouteux colloïdaux	0,03	1,2	1,7
Gravier grossier sans colloïdes	0,025	1,2	1,85
Petits enrochements en vrac	0,035	1,2	1,7

Réduire la vitesse de 25% si le canal est sinueux.

Augmenter la vitesse permise de 0,15m/s si la profondeur est > 0,9m.

Diminuer la vitesse permise si l'eau transporte des particules abrasives.

**Tableau 5.4 Vitesses maximales acceptables pour canaux rectilignes, de pente modérée et stabilisée (Fortier and Scobey, 1926)**

### 5.5.6 Forme optimale de la section d'un canal

Afin de réduire les coûts d'excavation et de matériaux de construction des canaux, on cherche à trouver la meilleure forme de la section pour véhiculer un débit donné. L'équation de Manning montre que pour la même section d'écoulement  $A$ , le débit d'écoulement est d'autant plus grand que le périmètre mouillé  $P$  est faible. Pour les canaux ouverts, on peut montrer de ce point de vue que la section la plus efficace est celle de forme semi-circulaire.

En prenant la forme semi-circulaire comme référence, les autres formes usuelles se situent dans l'ordre suivant :

	efficacité
- section parabolique avec $y/B = 0,5$	0,986
- section trapézoïdale avec $z = 0,58$ ; $b = 1,15y$	0,967
- section triangulaire avec $z = 1$	0,923
- section rectangulaire avec $b = 2y$	0,923

Le tableau 5.5 fournit les caractéristiques hydrauliques de la section optimale pour différentes géométries.

Forme de la section	Aire $A$	Périmètre mouillé $P$	Rayon hydraulique $R_H$	Largeur au plan d'eau $B$
Trapézoïde (demi hexagone)	$\sqrt{3} y^2$	$2\sqrt{3} y$	$y/2$	$4/3\sqrt{3} y$
Rectangle (demi carré)	$2 y^2$	$4 y$	$y/2$	$2 y$
Triangle (demi carré)	$y^2$	$2\sqrt{2} y$	$1/4\sqrt{2} y$	$2 y$
Demi cercle	$\pi/2 y^2$	$\pi y$	$y/2$	$2 y$
Parabole	$4/3\sqrt{2} y^2$	$8/3\sqrt{2} y$	$y/2$	$2\sqrt{2} y$

**Tableau 5.5 Sections hydrauliques optimales**

(adapté de Chow, 1988)

Pour comprendre comment les différentes caractéristiques des sections optimales sont calculées, considérons, à titre d'exemple, la section rectangulaire : la surface mouillée est  $A = By$  et le périmètre mouillé est  $P = B + 2y$ .

La section optimale est celle qui offre le débit maximal pour une section  $A$  d'écoulement donnée. D'après l'équation de Manning, le débit est maximal, pour une section donnée, quand le périmètre mouillé  $P$  est minimal. En prenant la section d'écoulement  $A$  comme paramètre, l'expression du périmètre mouillé est :  $P = A/y + 2y$ .

$P$  est minimal quand  $dP/dy = -A/y^2 + 2 = 0$ , ou  $A/y^2 = 2$ .

Or  $A = By$ .  
Donc :  $y = B/2$ .

Il est important de souligner que ce critère d'optimalité n'est pas le seul qui détermine le choix de la forme de la section. L'érosion des berges traitée dans le paragraphe précédent ainsi que la facilité de manutention et de pose sont aussi des critères importants dont il faut tenir compte.

## 5.6 Notion d'énergie spécifique

### 5.6.1 Définition

L'énergie spécifique  $E$  (figure 5.17) est définie par :

$$E = y + V^2/2g. \quad (5.18)$$

Il s'agit donc de l'énergie totale amputée de l'énergie potentielle ( $z = 0$ ). Compte tenu que  $V = Q/A$ , l'énergie spécifique s'écrit aussi :

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (5.19)$$

Comme  $A$  est fonction de la profondeur, on peut dire que  $E = E(y)$  pour un débit fixe donné (canal prismatique).

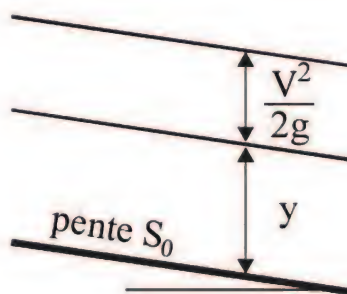


Fig 5.17 Énergie spécifique



### 5.6.2 Divers régimes d'écoulement

D'après la figure 5.18, on voit que pour une énergie spécifique donnée  $E$ , il existe deux profondeurs possibles,  $y_1$  et  $y_2$ , pour transporter un même débit  $Q$ . L'écoulement se fait avec l'une ou l'autre des profondeurs,  $y_1$  ou  $y_2$ , selon la rugosité et la pente du canal.

On voit aussi sur la figure 5.18 que pour assurer un débit donné  $Q$ , l'écoulement requiert une énergie minimale  $E_{\text{minimale}}$  à laquelle correspond une profondeur critique  $y_c$  et une vitesse critique  $V_c$ .

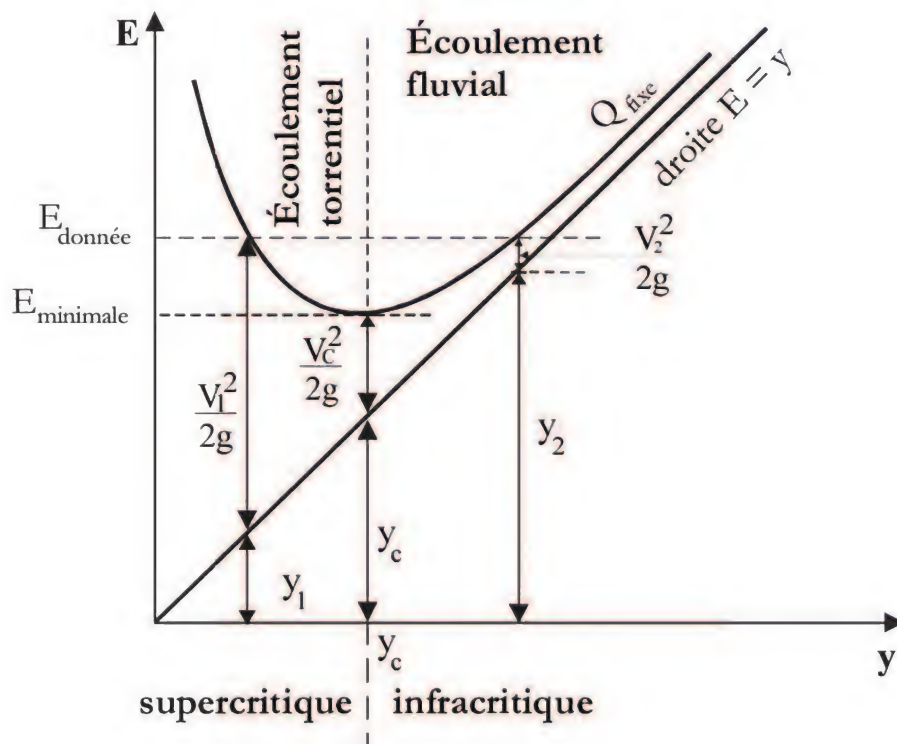


Fig. 5.18 Régimes d'écoulement dans les canaux

L'énergie spécifique  $E$  est minimale lorsque

$$\frac{dE}{dy} = 0 \quad (5.20)$$

En remplaçant l'énergie par son expression (5.19) dans (5.20), on obtient :

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dy} (A^{-2}) = 0$$

soit encore

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 0$$

Comme par définition  $dA/dy = B$ ,  $B$  étant la largeur au plan d'eau du canal, on obtient la relation suivante :

$$\frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \quad (5.21)$$

Le nombre de Froude «  $Fr$  » est un nombre sans dimensions défini par :

$$(Fr)^2 = \frac{BQ^2}{gA^3} \quad (5.22)$$

Comme  $dE/dy = 1 - Fr^2$ , trois cas peuvent se présenter :

- l'écoulement est fluvial quand  $Fr < 1$ ;  $dE/dy > 0$ ;  
ce cas se trouve dans la branche où  $V < V_c$ ,  $y_n > y_c$ , à la figure 5.18; les positions relatives de  $y_n$  et  $y_c$  sont illustrées sur la figure 5.19
- l'écoulement est critique quand  $Fr = 1$ ,  $V = V_c$ ,  $y = y_c$  ;  
ce cas se trouve au point le plus bas de la courbe où la pente est nulle à la figure 5.18; les positions relatives de  $y_n$  et  $y_c$  sont illustrées sur la figure 5.20
- l'écoulement est torrentiel quand  $Fr > 1$ ,  $dE/dy < 0$  ;  
ce cas se trouve dans la branche où  $V > V_c$ ,  $y < y_c$  à la figure 5.18; les positions relatives de  $y_n$  et  $y_c$  sont illustrées sur la figure 5.21

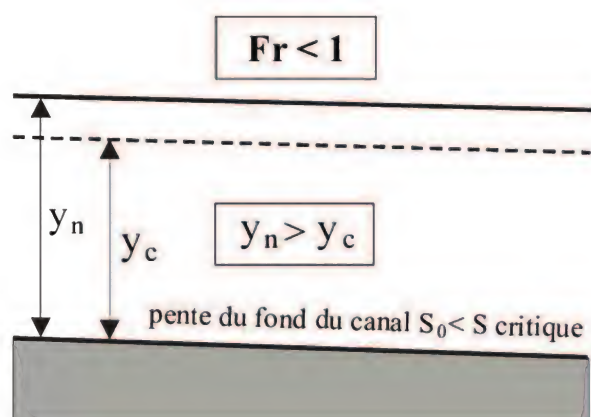


Fig. 5.19 Écoulement fluvial

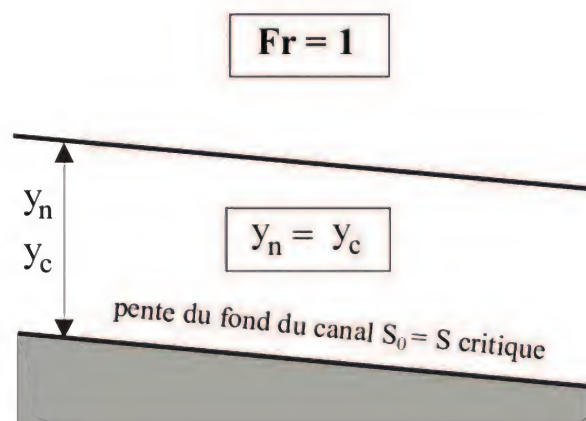


Fig. 5.20 Écoulement critique

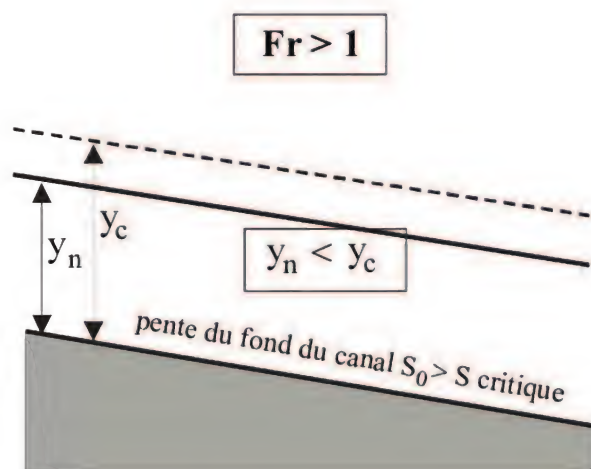


Fig. 5.21 Écoulement torrentiel



### 5.6.3 Cas particulier de la section rectangulaire

Le calcul des propriétés hydrauliques critiques ( $y_c$ ,  $V_c$ ,  $E_c$ ,  $S_c$ ) requiert généralement des calculs itératifs ou l'utilisation d'abaques. La section rectangulaire est une des rares exceptions où les calculs sont explicites.

Quand l'écoulement est critique, la section d'écoulement  $A_c$  se calcule par la relation suivante :

$$A_c = B y_c \quad (5.23)$$

En substituant cette valeur de  $A_c$  dans la relation (5.21), on obtient :

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{B^2 g} \right)^{1/3} \quad (5.24)$$

soit encore

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (5.25)$$

où  $q$  est le débit par unité de largeur du canal, appelé *débit unitaire* :

$$q = \frac{Q}{B} \quad (5.26)$$

En utilisant (5.25) et (5.26) dans (5.19), on peut calculer l'énergie spécifique critique :

$$E_c = \frac{3}{2} y_c \quad (5.27)$$

La vitesse critique peut alors se calculer par :

$$V_c = \frac{q}{y_c} = \sqrt{g y_c} \quad (5.28)$$

On peut aussi démontrer à partir de (5.27), que la hauteur critique  $y_c$  a comme valeur le double de la hauteur d'énergie cinétique. En effet,  $y_c = (2/3)E_c$ , donc  $V_c^2/2g = (1/3)E_c$  et

$$y_c = 2 \left( \frac{V_c^2}{2g} \right) \quad (5.29)$$

### ***Application 5.8***

Dans un canal à section rectangulaire, l'eau s'écoule avec une profondeur uniforme  $y = 0,9\text{m}$ . La largeur du canal est  $B = 2\text{m}$ . La vitesse d'écoulement est  $V = 2\text{m/s}$ .

Il s'agit de

- a) calculer la profondeur critique de l'écoulement
- b) calculer la vitesse critique de l'écoulement
- c) qualifier l'écoulement

Solution :

a) D'après (5.26),  $q = Q/B = vy = 2\text{m/s} \times 0,9\text{m} = 1,8\text{m}^3/\text{s/m}$

D'après (5.25),  $y_c = (q^2/g)^{1/3} = [(1,8 \text{ m}^2/\text{s})^2 / 9,81\text{m/s}^2]^{1/3} = 0,69\text{m}$

b) D'après (5.28),  $V_c = (gy_c)^{1/2} = (9,81\text{m/s}^2 \times 0,69\text{m})^{1/2} = 2,6\text{m/s}$

c)  $V < V_c$ , donc l'écoulement est fluvial ( $y > y_c$ ).

#### **5.6.4 Écoulement critique : cas général**

De façon générale, faisant référence à l'équation (5.22), la profondeur critique  $y_c$  se calcule par la solution de l'équation

$$\frac{BQ^2}{gA^3} = 1 \quad (5.30a)$$

Dans cette équation,  $A$  et  $B$  dépendent de  $y$  et la solution doit être obtenue à l'aide d'une procédure itérative. Par exemple, pour le cas trapézoïdal,

$A = y(b + zy_c)$  et  $B = b + 2zy_c$  et l'équation (5.30a) devient :

$$\frac{(b+2zy_c)Q^2}{gy^3(b+zy_c)^3} = 1 \quad (5.30b)$$

Il est impossible de trouver une relation explicite pour calculer la profondeur critique  $y_c$  en fonction des autres variables. En plus des procédures informatisées qui calculent  $y_c$  à l'aide d'une calculatrice programmable, on peut utiliser aussi les courbes de la figure 5.22 pour calculer la profondeur critique pour les sections géométriques courantes.

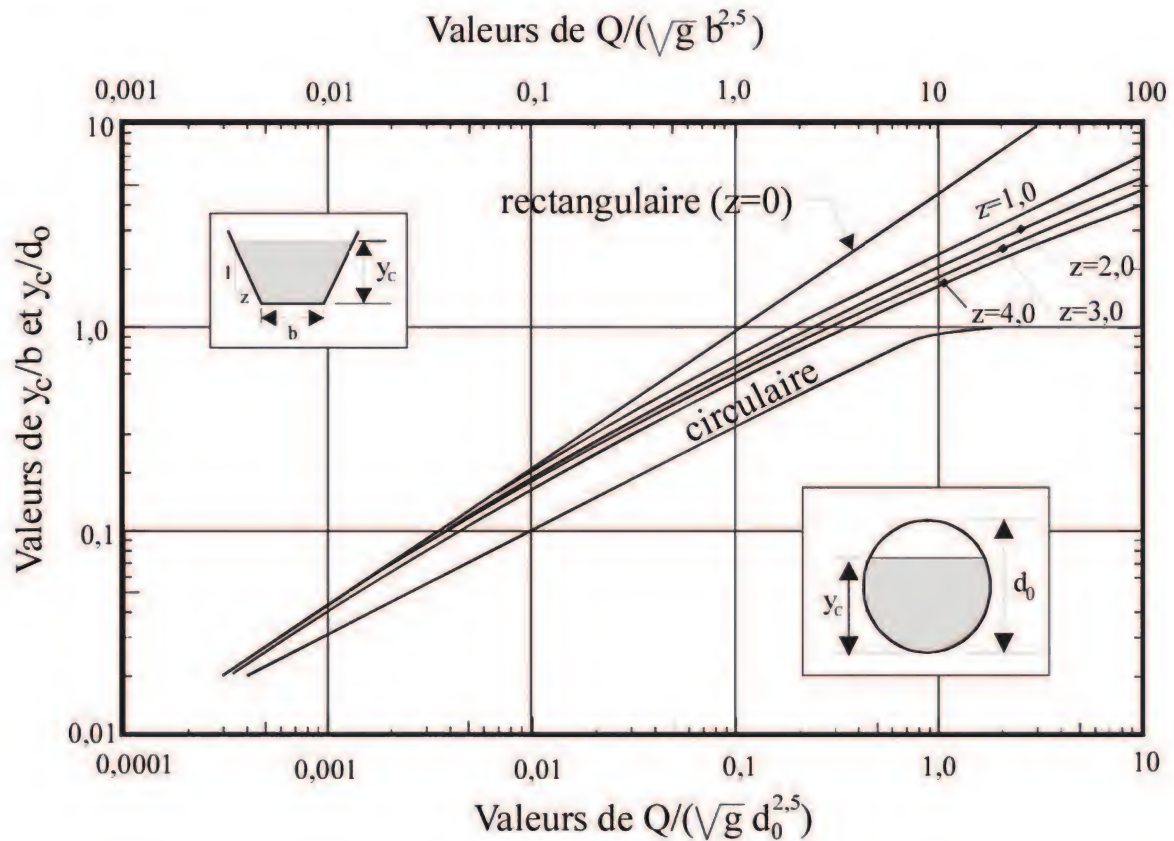


Fig. 5.22 Profondeur critique pour les canaux à ciel ouvert

Dans les sections composées, il peut y avoir plus d'une profondeur critique (voir Chaudry, 1993).



### Application 5.9

Un canal ayant une section de forme trapézoïdale a un fond large de  $b = 3,6\text{m}$ . Ses côtés ont une pente de 1. Le débit est  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ . Il faut calculer la profondeur critique  $y_c$ .

La profondeur critique est caractérisée par  $Fr = 1$ , soit  $BQ^2/(gA^3) = 1$ .

Prenant  $g=10\text{m/s}^2$ , on a selon l'équation (30.b) :

$$\frac{(b+2zy_c)Q^2}{gy_c^3(b+zy_c)^3} = 1$$

$$\frac{(3,6+2y_c) \cdot 10^2}{10y_c^3(3,6+y_c)^3} = 1$$

$$\text{soit} \quad \frac{y_c^3(3,6+y_c)^3}{1,8+y_c} = 20,4 \quad (a)$$

La solution de l'équation (a) ne peut être obtenue que par une méthode itérative. En utilisant plutôt la figure 5.22, on calcule :

$$\frac{Q}{\sqrt{g}} \frac{1}{b^{2,5}} = 0,1$$

La courbe pour  $z = 1$  donne  $y_c/b = 0,23$ .

La première estimation de  $y_c$  est donc  $y_c = 0,83\text{m}$ .

Si on utilise cette valeur dans (a) on obtient 18,75 au lieu de 20,4. En essayant 0,85m dans (a), on trouve 20,41, soit une solution pratiquement parfaite.

### 5.6.5 Interprétation de l'écoulement critique

La courbe de variation de l'énergie spécifique en fonction de la profondeur (figure 5.18) montre qu'au voisinage de l'écoulement critique, une petite variation de l'énergie  $E$  provoque une grande variation de la profondeur  $y$ . Ainsi, l'écoulement critique est instable avec l'apparition d'ondulations à la surface libre. Quand le nombre de Froude est inférieur à 0,86 ou supérieur à 1,13, ces instabilités disparaissent (U.S. Army Corps of Engineers, 1995).

Une des caractéristiques de *l'écoulement infracritique* est de propager les perturbations à l'écoulement vers l'amont et vers l'aval. *L'écoulement supercritique* ne propage les petites perturbations que vers l'aval. Cette remarque est très importante pour déterminer l'emplacement de la section de contrôle, particulièrement pour les écoulements dans les ponceaux.

L'application 5.10 qui suit, permet de comprendre la notion d'écoulement critique.

#### Application 5.10

Un débit  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$  s'écoule dans un canal à section rectangulaire de largeur  $B = 10\text{m}$  (figure 5.23a). La profondeur d'écoulement au point (1) est  $y_1 = 2,0\text{m}$ .

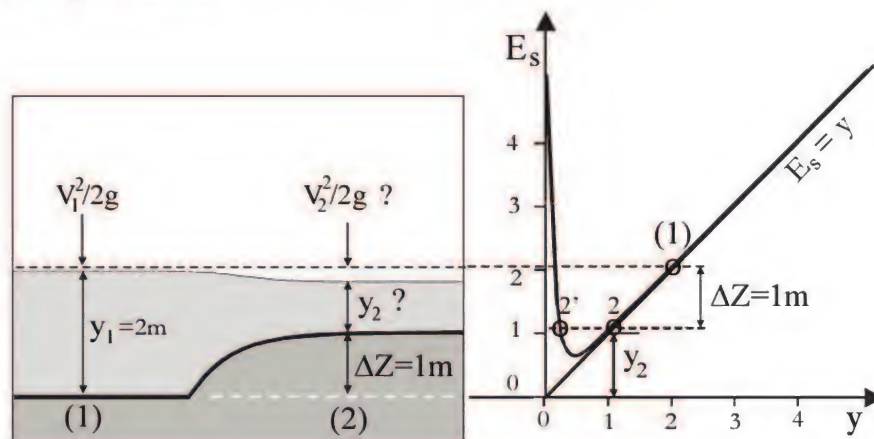


Fig. 5.23a Surélévation du fond du canal

- 1) On introduit une surélévation  $\Delta Z = 1,0\text{m}$  au point 2. Quelle est la profondeur  $y_2$  au point 2?

Construisons la courbe d'énergie spécifique  $E_s(y)$ .

La profondeur critique  $y_c$  se calcule par le relation (5.25) :

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad \text{où } q = Q/B = (10 \text{ m}^3/\text{s}) / 10 \text{ m} = 1,0 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

$$y_c = 0,46 \text{ m}$$

$$E_{\min} = (3/2)y_c = 0,69 \text{ m}.$$

On prend deux profondeurs plus faibles que  $y_c$  et deux plus élevées que  $y_c$  pour tracer la courbe  $E_s(y)$ .

Ainsi :

$y = 0,2 \text{ m}$	$V = 5,0 \text{ m/s}$	$V^2/2g = 1,25 \text{ m}$	$E_s = 1,45 \text{ m}$
$y = 0,3 \text{ m}$	$V = 3,33 \text{ m/s}$	$V^2/2g = 0,55 \text{ m}$	$E_s = 0,85 \text{ m}$
$y = 2,0 \text{ m}$	$V = 0,50 \text{ m/s}$	$V^2/2g = 0,0125 \text{ m}$	$E_s = 2,013 \text{ m}$
$y = 4,0 \text{ m}$	$V = 0,25 \text{ m/s}$	$V^2/2g = 0,002 \text{ m}$	$E_s = 4,002 \text{ m}$

Comme la profondeur au point (1)  $y_1 = 2,0 \text{ m} > y_c = 0,46 \text{ m}$ , l'écoulement est fluvial.

La figure 5.23a montre l'allure de la surface libre à la suite de l'introduction de la surélévation  $\Delta Z$  dans le fond.

Par ailleurs, les valeurs de  $y$  et de  $E_s$  trouvées précédemment permettent de tracer la courbe  $E_s(y)$ .

Afin de déterminer analytiquement la profondeur inconnue  $y_2$ , on applique l'équation de conservation d'énergie.

En négligeant les pertes de charge entre les sections 1 et 2, on écrit

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta Z \quad (a)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$V_1 y_1 = V_2 y_2 = q \quad (b)$$

En substituant (a) dans (b), on obtient :

$$2gy_2^3 + y_2^2 \left( 2g \times \Delta Z - 2gy_1 - \frac{q}{y_1^2} \right) + q^2 = 0 \quad (c)$$



$$20y_2^3 - 20,25y_2^2 + 1,0 = 0$$

L'équation (c) possède 3 racines :

$$y_2 = 0,958, \quad y_2' = 0,2573, \quad y_2'' = -0,2028.$$

Il faut trouver parmi les deux solutions positives celle qui représente réellement la profondeur de l'écoulement au point 2.

La courbe de l'énergie spécifique  $E_s(y)$  donne la réponse. En ôtant  $\Delta Z$  à l'énergie spécifique au point 1, passe-t-on au point 2 ( $y_2 = 0,958\text{m}$ ) ou 2' ( $y_2' = 0,2573\text{m}$ ) ? Si le point cherché était 2', un point existerait entre les sections 1 et 2 où la chute de l'énergie spécifique serait supérieure à  $\Delta Z$ , ce qui est impossible. C'est donc le point 2, où la profondeur  $y_2 = 0,958\text{m}$ , qui donne la solution.

On aurait pu d'ailleurs lire directement sur le graphique la solution approximative du problème.

2) Si l'on avait introduit une surélévation  $\Delta Z = 1,3225\text{m}$ , quelle aurait été la profondeur au point 2?

En négligeant les pertes de charge entre les points (1) et (2), l'équation d'énergie s'écrit::

$$E_2 = E_1 - \Delta Z = 2,0125\text{m} - 1,3225\text{m} = 0,69\text{m}$$

L'énergie au point 2 est  $E_2 = E_{\min} = 0,69\text{m}$  calculée précédemment.

La profondeur en (2),  $y_2$ , est par conséquent égale à la profondeur critique  $y_c = 0,46\text{m}$  (figure 5.23b)

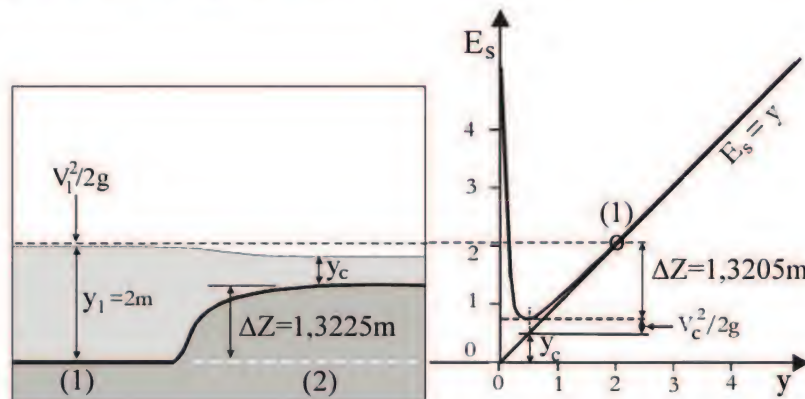


Fig. 5.23b Surélévation produisant un écoulement critique

3) Que se passe-t-il si l'on introduit une surélévation  $\Delta Z = 1,5\text{m}$ , comme illustré sur la figure 5.23c ?

L'énergie spécifique au point (2) est

$$E_2 = E_1 - \Delta Z = 2,0125\text{m} - 1,5\text{m} = 0,5125\text{m}.$$

Comme cette énergie est plus faible que l'énergie minimale nécessaire pour véhiculer le débit  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ , le débit passant au-dessus de l'obstacle est réduit.

La nouvelle profondeur d'écoulement est  $y_c = (2/3)E_2 = 0,3417\text{m}$ .

Le débit unitaire réduit est  $q = \sqrt{gy_c^3} = 0,63\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$ . Le débit d'écoulement est

$$Q = Bq = 10\text{m} \cdot 0,63\text{m}^3/\text{s}/\text{m} = 6,3\text{m}^3/\text{s}$$

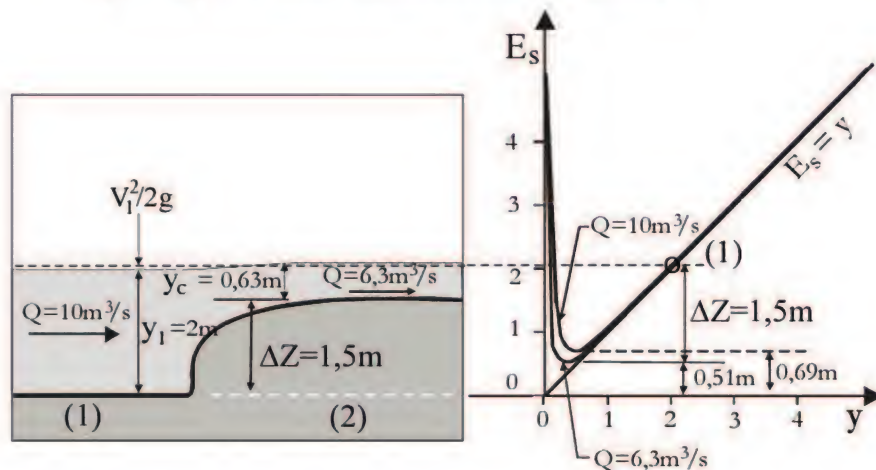


Fig. 5.23c Surélévation produisant un refoulement

La figure 5.23c montre que le nouveau point critique appartient à une courbe d'énergie spécifique tracée pour un débit  $Q = 6,3\text{m}^3/\text{s}$ .

Comme le débit amené par le canal est  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ , la différence  $\Delta Q = 10\text{m}^3/\text{s} - 6,3\text{m}^3/\text{s} = 3,7\text{m}^3/\text{s}$  va s'accumuler en amont de la surélévation. Quand l'énergie au-dessus de l'obstacle atteint de nouveau  $E_{\min} = 0,69\text{m}$  et  $y_c = 0,46\text{m}$ , soit les valeurs critiques initiales pour faire passer le débit  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ , le régime devient établi. L'énergie spécifique amont devient alors  $E'_1 = E_{\min} + \Delta z = 0,69 + 1,5 = 2,19\text{m}$ . La profondeur amont  $y_1$  passe alors de  $y_1 = 2,0\text{m}$  à  $y_1 = 2,18\text{m}$ .



On conclut donc que :

- 1- tant que la surélévation du fond reste inférieure ou égale à une certaine limite, en l'occurrence  $\Delta Z = 1,3225\text{m}$ , il n'y a pas de refoulement,
- 2- quelle que soit la hauteur de l'obstacle, supérieure à  $\Delta Z = 1,3225\text{m}$ , la profondeur  $y_2$  sera toujours égale à la profondeur critique qui ne dépend que du débit; dans ce cas il y a refoulement.

### 5.6.6 Notion de pente critique

Pour une certaine valeur de la pente, la profondeur normale  $y_n$  est égale à la profondeur critique  $y_c$ . Cette valeur particulière de la pente du fond du canal est appelée pente critique  $S_c$ .

Quelle valeur doit prendre la pente du canal pour que la profondeur normale du courant considéré soit égale à la profondeur critique, c'est-à-dire pour que le régime y soit à la fois uniforme et critique? On recherche  $S_c$  en utilisant l'équation (5.13) :

$$S_c = \left( \frac{nQ}{A_c R_{H_c}^{2/3}} \right)^2 \quad (5.31)$$

La section critique  $A_c$  et le rayon hydraulique  $R_{H_c}$  sont calculés à l'aide de la profondeur  $y_c$ . Cette profondeur critique  $y_c$  est calculée à l'aide de l'équation (5.21).

Il est utile d'obtenir une relation explicite simple pour les canaux et rivières très larges par rapport à leur profondeur. Dans ce cas, le périmètre mouillé est

$$P = b + 2y \approx B \quad (5.32)$$

L'équation de Manning (5.13) s'écrit :

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S^{1/2} = \frac{A^{5/3}}{n} \frac{S^{1/2}}{P^{2/3}} \quad (5.33)$$

En écoulement critique :



$$Q = \frac{1}{n} \frac{(By_c)^{5/3}}{B^{2/3}} S_c^{1/2} \quad (5.34)$$

D'un autre côté, l'équation  $Fr = 1$  ou  $\frac{BQ^2}{gA^3} = 1$  fournit :

$$Q = \sqrt{\frac{gA^3}{B}} = g^{1/2} \frac{(By_c)^{3/2}}{B^{1/2}} \quad (5.35)$$

Les équations (5.34) et (5.35) étant égales, on obtient :

$$\frac{1}{n} \frac{(By_c)^{5/3}}{B^{2/3}} S_c^{1/2} = g^{1/2} \frac{(By_c)^{3/2}}{B^{1/2}}$$

et

$$S_c = \frac{gn^2}{y_c^{1/3}} \quad (5.36)$$

En remplaçant  $y_c$  par sa valeur en fonction du débit (5.25), la relation (5.36) devient :

$$S_c = \frac{g^{10/9} n^2}{q^{10/9}} \quad (5.37)$$

Comme  $S_c$  varie en fonction inverse du débit, un même cours d'eau peut présenter le caractère fluvial à l'étiage et le caractère torrentiel en période de crue. Associant ces définitions à celles données précédemment, on peut résumer :

Pente faible - régime fluvial :  $S_0 < S_c$ ;  $y_o > y_c$ ;  $V < V_c$ ;  $Fr < 1$

Pente forte - régime torrentiel:  $S_0 > S_c$ ;  $y_o < y_c$ ;  $V > V_c$ ;  $Fr > 1$

Pente critique - régime critique:  $S_0 = S_c$ ;  $y_o = y_c$ ;  $V = V_c$ ;  $Fr = 1$

#### *Remarque*

La relation (5.36) aurait pu être obtenue directement en substituant (5.32), (5.25) et (5.26) dans (5.31).

### Application 5.11

Soit un canal rectangulaire de la largeur  $B = 30,0\text{m}$  et de coefficient de Manning  $n = 0,040$ . Il faut calculer la pente critique pour les débits  $Q$  suivants :  $30,0\text{m}^3/\text{s}$ ,  $60,0\text{m}^3/\text{s}$  et  $90,0\text{m}^3/\text{s}$ .

En calculant le débit unitaire  $q = Q/B$  et en utilisant la relation (5.37) on obtient :

$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	$q \text{ (m}^3/\text{s/m)}$	$S_c$
30,0	1,0	0,0202
60,0	2,0	0,0094
90,0	3,0	0,0060

Cet exemple montre clairement que la notion de raideur ou douceur d'une pente n'est pas absolue mais dépend du débit. Une pente peut en effet être qualifiée de douce pour une valeur donnée du débit mais peut devenir raide pour une autre valeur du débit. En fait, plus le débit augmente, plus faible est la pente critique au-delà de laquelle l'écoulement est torrentiel.

## 5.7 Écoulement variant graduellement

### 5.7.1 Définition

Lorsque la surface libre de l'eau et le fond du canal ne sont pas parallèles, l'écoulement est dit *variant*. Quand la vitesse croît et, en corollaire, la profondeur diminue dans le sens de l'écoulement, ce dernier est accéléré. Dans le cas contraire, l'écoulement est retardé.

Quand la profondeur varie progressivement d'une section à l'autre, comme dans le bief de transition entre une rivière et un barrage, l'écoulement est dit *variant graduellement*.

### 5.7.2 Problématique

Quand l'écoulement est uniforme, la connaissance de la profondeur à un seul endroit permet de localiser la position de la surface libre de l'eau. Quand l'écoulement varie graduellement, la connaissance de la position de la surface libre de l'eau nécessite la connaissance de plusieurs profondeurs qui servent de points d'interpolation dans la procédure appelée « calcul de courbe de remous ». La connaissance de cette courbe de remous est essentielle pour les riverains qui risquent d'être inondés. Ce calcul peut épargner le coût de la mesure des niveaux ou renseigner sur les répercussions de différents scénarios d'aménagement et de gestion sur le risque d'inondation.

### 5.7.3 Calcul de la courbe de remous

#### 5.7.3.1 Équation de la courbe de remous

La figure 5.24 montre la variation des différents paramètres de l'écoulement variant graduellement entre deux sections 1 et 2.

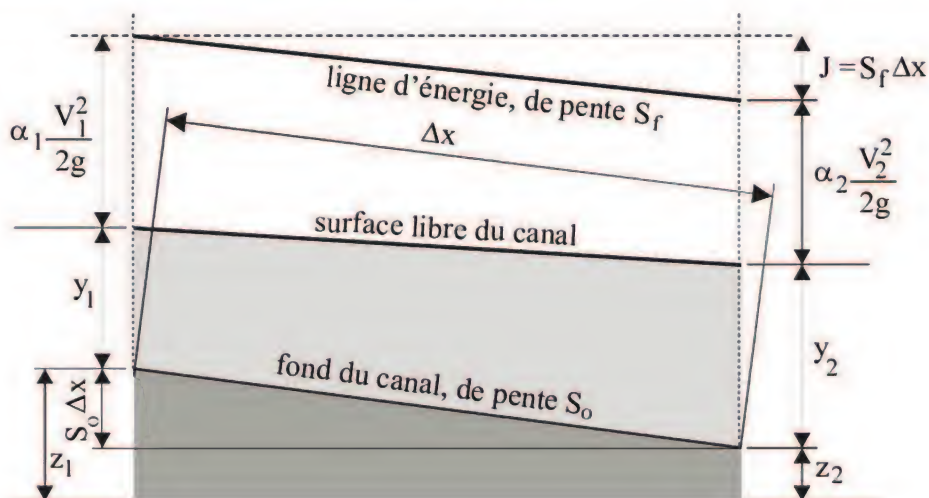


Fig. 5.24 Écoulement variant graduellement

Afin de développer l'équation différentielle du mouvement variant graduellement, on a recours aux hypothèses suivantes :

- 1) L'écoulement est permanent.
- 2) La pente de la ligne d'énergie à chaque point peut se calculer à l'aide de l'équation de Manning (5.13).



La première hypothèse signifie que toutes les propriétés de l'écoulement, et notamment le débit, sont invariantes dans le temps. On vise plutôt à déterminer comment se propage dans l'espace une perturbation introduite par une singularité (barrage, vanne...).

La deuxième hypothèse est utile pour pouvoir calculer la pente de la ligne d'énergie. L'équation de Manning qu'on propose d'utiliser a été développée pour l'écoulement uniforme où la profondeur d'écoulement reste constante dans l'espace et dans le temps. On peut utiliser l'équation de Manning dans un écoulement variant graduellement qu'on suppose comme une succession d'écoulements uniformes où la profondeur normale varie d'un petit tronçon à l'autre.

Finalement les hypothèses faites auparavant pour l'écoulement uniforme sont maintenues (pente du canal faible et coefficient de Manning constant avec la profondeur).

L'équation de Bernoulli appliquée dans ces conditions entre les sections 1 et 2 séparées d'une longueur  $\Delta x$  s'écrit, en supposant le coefficient de répartition des vitesses  $\alpha = 1$  pour toutes les sections :

$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + S_f \Delta x \quad (5.38)$$

ou encore

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = - S_f \quad (5.39)$$

En prenant deux sections très rapprochées, l'équation (5.39) devient :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = - S_f \quad (a)$$

Par définition, on a :

$$\frac{dz}{dx} = - S_0 \quad (b)$$

où  $S_0$  est la pente du canal.

Par ailleurs, la règle de dérivation d'une fonction composée nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{V^2}{2g} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} \quad (c)$$

Or, tel qu'établi dans (5.20),

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = -Fr^2 \quad (d)$$

En substituant (b), (c) et (d) dans (a), on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - Fr^2} \quad (5.40)$$

Avec l'obtention de cette équation, on n'est pas loin du but recherché. On voulait déterminer la profondeur  $y$  à différentes distances  $x$  d'un repère. L'équation (5.40) fournit la dérivée  $dy/dx$  qu'il faut intégrer pour atteindre le but recherché.

Le terme  $dQ/dx$  représente le débit ajouté ou déversé par unité de longueur.

Pour simplifier l'intégration, on suppose dorénavant qu'il n'y a ni apport ni perte de débit latéral, si bien que  $dQ/dx = 0$ .

### 5.7.3.2 Forme générale de la courbe de remous

Avant de passer en revue les différentes techniques d'intégration pour obtenir  $y(x)$ , examinons l'équation (5.40) pour dégager les différentes formes possibles de la surface libre. Cet examen est essentiel pour mener adéquatement les calculs de la courbe de remous. On fait l'hypothèse que la pente de la ligne d'énergie  $S_f$  peut se calculer par la même formule que celle utilisée pour l'écoulement uniforme, soit l'équation de Manning (5.13) où  $A$  et  $R_H$  sont la section et le rayon hydraulique calculés pour une profondeur courante  $h$ . L'équation (5.13) est reproduite ici par mesure de commodité comme équation (5.41a) :

$$Q = \frac{1}{n} A R_H^{2/3} S_f^{1/2} \quad (5.41a)$$

En écrivant  $A_n$  et  $R_{Hn}$  pour l'écoulement uniforme avec une profondeur  $h_n$ , on obtient :

$$Q = \frac{1}{n} A_n R_{Hn}^{2/3} S_0^{1/2} \quad (5.41b)$$

En égalisant les deux membres de droite des équations (5.41a) et (5.41b), on obtient  $AR_H^{2/3} S_f^{1/2} = A_n R_{Hn}^{2/3} S_0^{1/2}$ , soit encore :

$$\frac{S_f}{S_0} = \left( \frac{R_{Hn}}{R_H} \right)^{4/3} \left( \frac{A_n}{A} \right)^2 \quad (5.42)$$

D'après (5.42) il est clair que

lorsque  $h = h_n$ ,  $S_f = S_0$  (fait déjà connu),  
 lorsque  $h > h_n$ , on a  $S_0 > S_f$ ,  
 lorsque  $h < h_n$ , on a  $S_0 < S_f$ .

Par ailleurs on a déjà établi, en étudiant la notion de pente critique à la section 5.6.6, que :

lorsque  $Fr^2 = 1$ , on a  $h = h_c$ ,  
 lorsque  $Fr^2 > 1$ , on a  $h < h_c$ ,  
 lorsque  $Fr^2 < 1$ , on a  $h > h_c$ .

Considérons maintenant une pente douce (« mild slope ») et examinons sur la figure 5.25 les différents types de courbes de remous qu'il est possible de rencontrer (courbes de type M)

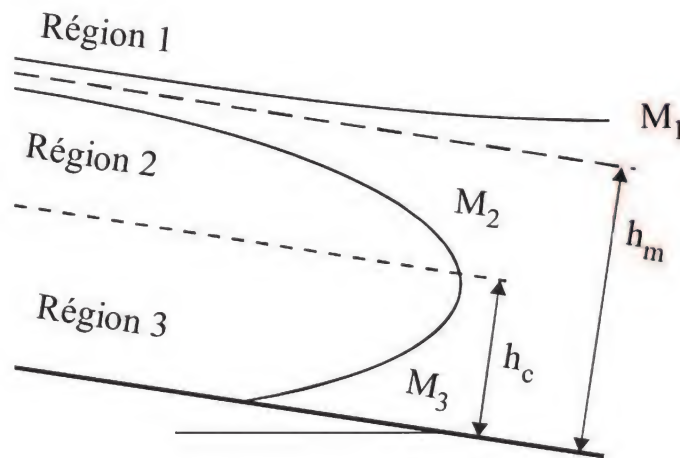


Fig. 5.25 Courbes de remous de type M



Trois cas peuvent se présenter :

1)  $b > h_n > h_c$  :

La courbe se trouve dans la région 1 (figure 5.25).

Puisque  $h > h_n$ ,  $S_0 - S_f > 0$ .

Puisque  $h > h_c$ ,  $1 - Fr^2 > 0$ .

Il en résulte d'après (5.40) que  $dy/dx > 0$ . La profondeur augmente donc dans la direction de l'écoulement comme l'indique la courbe  $M_1$ .

Lorsque  $h$  tend vers  $h_n$  et  $S_f$  tend vers  $S_0$ , l'équation (5.40) montre que  $dy/dx$  tend vers 0, ce qui veut dire que la profondeur de l'eau tend vers la profondeur normale comme asymptote.

Lorsque  $h$  tend vers une valeur infinie,  $S_f$  tend vers 0 et  $Fr$  tend vers 0, si bien que  $dy/dx$  tend vers  $S_0$ . La surface libre de l'eau tend alors vers l'horizontale (puisque  $dy/dx$  est la pente de la surface libre par rapport au fond du canal).

La courbe de remous de type  $M_1$  se rencontre, par exemple, en amont d'un barrage.

2)  $h_c < b < h_n$  :

La courbe de remous se trouve dans la région 2 (figure 5.25).

Puisque  $h < h_n$ ,  $S_0 - S_f < 0$ .

Puisque  $h > h_c$ ,  $1 - Fr^2 > 0$ .

Il en résulte d'après (5.40) que  $dy/dx < 0$ . La profondeur de l'eau diminue donc dans la direction de l'écoulement, comme le montre la courbe  $M_2$ . Ce genre de courbe se rencontre lors d'un changement de pente (de douce à raide) ou lors d'une chute à la fin d'un canal.

3)  $b < h_c < h_n$  :

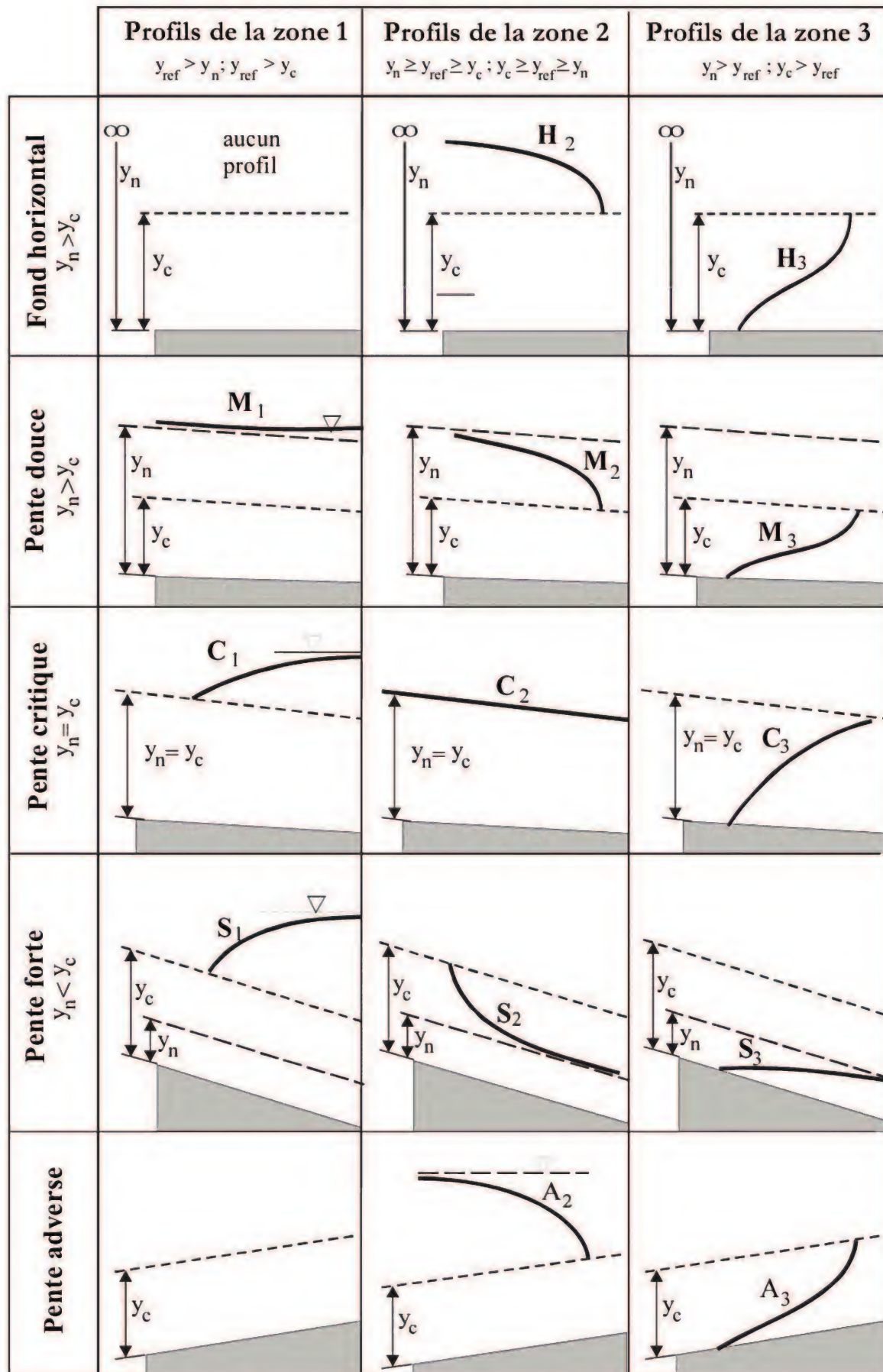
La courbe de remous se trouve dans la région 3 (figure 5.25).

Puisque  $h < h_n$ ,  $S_0 - S_f < 0$ .

Puisque  $h < h_c$ ,  $1 - Fr^2 < 0$ .

D'après (5.40),  $dy/dx$  est donc positif. Par conséquent, la profondeur de l'eau augmente dans la direction de l'écoulement, comme le montre la courbe  $M_3$ . Ce genre de courbe se rencontre à la sortie d'une vanne ou au pied d'un barrage-déversoir.

Avec un raisonnement similaire on peut trouver les différentes formes de la surface libre de l'eau pour une pente raide ( steep slope ), une pente critique, un fond horizontal et une pente adverse. Les différentes formes sont présentées dans la figure 5.26.

Fig. 5.26 Formes de la surface libre ( $y_{\text{ref}}$  = profondeur de référence)

### 5.7.3.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

A) Méthode indirecte d'intégration numérique pour les canaux prismatiques.

Réécrivons l'équation (5.40) à résoudre, en considérant  $dQ/dx = 0$  :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (5.43)$$

En tenant compte de l'hypothèse que la pente de la ligne d'énergie  $S_f$  peut être calculée pour chaque profondeur en utilisant l'équation de Manning (5.13), l'équation (5.43) devient en différences finies:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{S_0 - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}}}{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}} \quad (5.44)$$

Dans cette équation, les données du problème, pour une section rectangulaire à titre d'exemple, sont normalement  $Q$ ,  $n$ ,  $B$ ,  $g$ ,  $S_0$  et  $\Delta x$ .

On connaît la profondeur  $y_1$  en un point 1 et on cherche la profondeur  $y_2$  à une distance  $\Delta x$  du point 1. La difficulté provient du fait qu'on est incapable d'estimer directement le rayon hydraulique  $R_H$  et la section mouillée  $A$  qui dépendent de l'inconnue  $y_2$ .

Une manière de contourner cette difficulté consiste à inverser le problème en réécrivant l'équation (5.44) sous la forme suivante :

$$\Delta x = \Delta y \frac{1 - \frac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \frac{n^2 Q^2}{A^2 R_H^{4/3}}} \quad (5.45)$$

Plutôt que de chercher  $y_2$ , on se donne une valeur arbitraire mais raisonnable de  $y_2$  et on calcule la distance  $\Delta x$  à laquelle cette profondeur  $y_2$  sera observée. On calcule ainsi une profondeur moyenne  $y_{\text{moy}}$  par la relation :

$$y_{\text{moy}} = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5.46)$$



Cette valeur  $y_{\text{moy}}$  permet de calculer  $A_{\text{moy}}$  et  $R_{H_{\text{moy}}}$ . D'une manière plus détaillée, cette méthode consiste à procéder selon les étapes suivantes :

- 1) Calculer  $y_c$  et  $y_n$  afin de caractériser la pente  $S_0$  du canal.
- 2) Identifier le type de courbe de remous à l'aide de la profondeur  $y_{\text{ref}}$  qui doit être connue soit à l'amont soit à l'aval du bief de canal sur lequel se fait l'intégration.
- 3) Si  $y_{\text{ref}}$  est connue à l'amont, on procède comme suit :
  - a)  $y_1 = y_{\text{ref}}$ .
  - b)  $y_2 = y_1 \pm \Delta y$  ( le signe dépend du type de courbe de remous).
  - c)  $y_{\text{moy}} = (y_1 + y_2)/2$ .
  - d) Calculer  $A_{\text{moy}}$ ,  $R_{H_{\text{moy}}}$ .
  - e) Calculer  $\Delta x$  à l'aide de la relation (5.45), utilisant  $y_{\text{moy}}$ .
  - f) Ajouter  $\Delta x$  aux  $\Delta x$  cumulés jusqu'à cette étape.  
Si la somme est inférieure à la longueur  $L$  du bief d'intégration, on continue :  $y_2$  devient  $y_1$  pour l'étape suivante d'intégration et on recommence en b).

Si  $y_{\text{ref}}$  est connue à l'aval, la procédure est similaire sauf qu'il faut considérer l'étape b) en inversant les rôles de  $y_1$  et de  $y_2$  et il faut substituer  $y_2$  à  $y_1$  à l'étape a).

## B) Méthode pour les canaux non prismatiques

La méthode de solution de l'équation du mouvement exposée précédemment a l'avantage d'être simple mais elle se limite aux canaux prismatiques. De plus, elle ne permet pas de calculer directement la profondeur de l'eau à un endroit ciblé. La méthode itérative suivante permet d'éviter ces contraintes.

L'équation de Bernoulli entre deux sections (1) et (2) s'écrit :

$$y_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} + S_0 \Delta x = y_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2} + S_f \Delta x + h_s \quad (5.47)$$

$h_s$  étant la perte de charge singulière due aux changements de section ou de direction.

En général, quand l'écoulement est torrentiel, on doit calculer les profondeurs d'eau en allant de l'amont vers l'aval. Quand l'écoulement est fluvial, on doit procéder de l'aval vers l'amont comme suit, en posant :

$$y_2 = y_{\text{ref}}$$

- 1- attribuer une valeur à  $y_1$ ,
- 2- utiliser  $y_1$  et  $y_2$  pour calculer  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $h_s$ ,  $S_{f1}$  et  $S_{f2}$ , à l'aide de l'équation de Manning, puis  $S_f = (S_{f1} + S_{f2})/2$ ,
- 3- si l'équation (5.47) est vérifiée à une tolérance près, on arrête les calculs; sinon, on modifie  $y_1$  et on recommence à l'étape 2.

Quand l'écoulement est torrentiel, la procédure est similaire en partant de la profondeur  $y_1$  qui doit être connue.

Il s'agit, bien évidemment, de calculs itératifs qui sont intégrés dans des logiciels tels que HEC-RAS (U.S. Army, 1995).

### ***Application 5.12***

Il faut trouver le type de courbe de remous pour le canal de section rectangulaire ayant les propriétés suivantes :

$$S_o = 0,005 \quad n = 0,025 \quad B = 5,0\text{m} \quad y_{\text{ref}} = 4,0\text{m}$$

Le débit est de  $20,0\text{m}^3/\text{s}$ .

Solution :

Pour une section rectangulaire,  $y_c = (q^2/g)^{1/3}$

Avec  $q = Q/B = (20,0\text{m}^3/\text{s})/5,0\text{m} = 4,0\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ ,

$$y_c = (4,0^3/9,81)^{1/3} = 1,177\text{m}.$$

À l'aide de la figure 5.14, on calcule  $y_n$

$$\frac{nQ}{\sqrt{S_o} b^{8/3}} = \frac{0,025 \cdot 20}{\sqrt{0,005} \cdot 5^{8/3}} = 0,0967$$

$$\text{donc } y_n/b = 0,23 \text{ et } y_n = 1,15\text{m}$$

Puisque  $y_n < y_c$ , la pente du canal est raide. Comme  $y_{\text{ref}} > y_c$ , la courbe de remous est de type S1 d'après la figure 5.26.

## 5.8 Écoulement variant brusquement

### 5.8.1 Définition du ressaut hydraulique

L'écoulement variant brusquement a été défini et décrit au début de ce chapitre (section 5.1). Une importante manifestation de ce type d'écoulement est le ressaut hydraulique.

Le *ressaut hydraulique* est une surélévation brusque de la surface libre d'un courant survenant lorsqu'un régime torrentiel devient fluvial sur une courte distance. Des courbes de remous illustrant ce phénomène sont montrées sur la figure 5.27.

Le ressaut hydraulique peut se produire dans différentes circonstances : par exemple au pied d'un barrage-déversoir (figure 5.27) ou à l'aval d'un écoulement en-dessous d'une vanne de fond ou encore dans un canal à forte pente débouchant dans un écoulement fluvial.

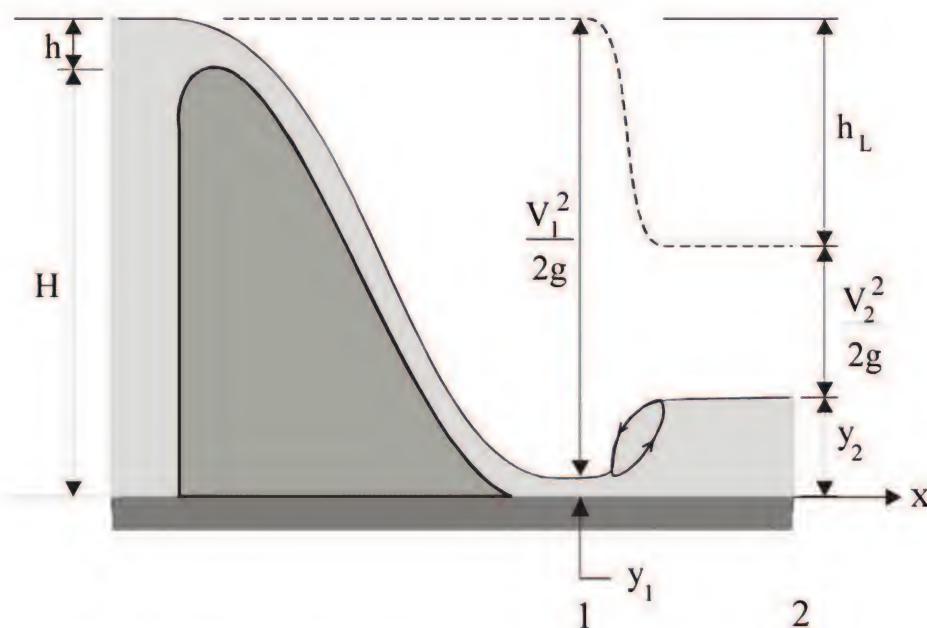


Fig. 5.27 Ressaut hydraulique au pied d'un barrage-déversoir

La ligne d'énergie, indiquée en pointillé sur la figure 5.27, montre que le ressaut hydraulique provoque une dissipation d'énergie par turbulence ( $h_L$ ).



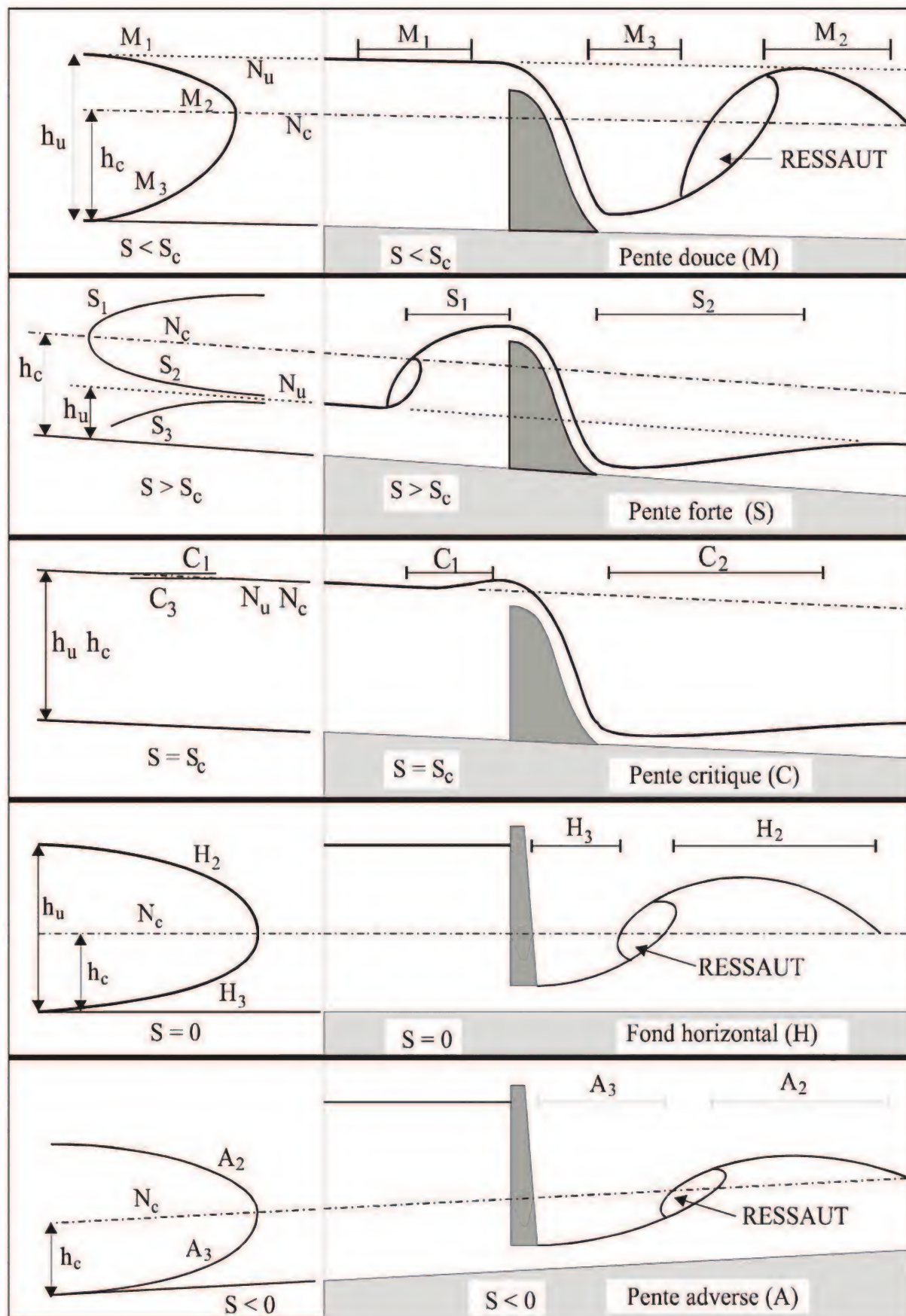


Fig. 5.28 Exemples de courbes de remous avec ressaut hydraulique

### 5.8.2 Profondeurs conjuguées

On appelle *profondeurs conjuguées* les profondeurs  $y_1$  et  $y_2$  observées respectivement en amont et en aval du ressaut hydraulique (figure 5.27).

Pour trouver la relation entre les deux profondeurs conjuguées  $y_1$  et  $y_2$  pour un canal rectangulaire, écrivons l'équation de la quantité de mouvement pour un volume de contrôle compris entre les sections 1 et 2 (figure 5.27) :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho Q (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \quad (5.48)$$

où  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  représente les forces extérieures.

La pente étant faible et la distance courte entre les sections 1 et 2, on néglige les forces de gravité et de frottement dans la direction de l'écoulement  $x$ . Dans ce cas, la somme des forces extérieures se résume aux forces de pression dont le bilan est :

$$\sum F_{\text{ext}} = \rho g B \left( \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} \right) = \rho Q (V_2 - V_1) \quad (5.49)$$

En tenant compte de l'équation de continuité entre les sections 1 et 2 :

$$V_2 = V_1 (y_1/y_2),$$

l'équation (5.49) s'écrit :

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = \frac{Q}{gB} \left( V_1 \frac{y_1}{y_2} - V_1 \right) = \frac{Q V_1}{gB} \left( \frac{y_1 - y_2}{y_2} \right)$$

Substituant le débit unitaire (5.26) et se rappelant que :

$$(y_1^2 - y_2^2) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$

on obtient :

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{q V_1}{g y_2} \quad (5.50)$$

Substituant  $V_1 = q/y_1$  dans (5.50), on obtient :

$$y_1 y_2 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{q^2}{g} \quad (5.51)$$

En utilisant l'expression (5.25) pour  $y_c$ , l'équation (5.51) s'écrit aussi :

$$y_1 y_2 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = y_c^3 \quad (5.52)$$

Les relations (5.51) ou (5.52) permettent de calculer une des profondeurs conjuguées ( $y_1$  ou  $y_2$ ) quand on connaît l'autre.

### 5.8.3 Perte d'énergie dans le ressaut hydraulique

La perte d'énergie dans le ressaut hydraulique se calcule en appliquant l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 (figure 5.27) :

$$\Delta H = \left( \frac{V_1^2}{2g} + y_1 + z_1 \right) - \left( \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2 \right) \quad (5.53)$$

On néglige la variation de l'énergie potentielle sur une courte distance, de telle sorte que  $z_1 = z_2$ . Prenant en considération les équations (5.51) et (5.53), développées pour une section rectangulaire, ainsi que l'équation de continuité écrite sous la forme  $y_1 V_1 = y_2 V_2$ , on obtient l'expression suivante pour la perte de charge  $h_L$ :

$$h_L = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (5.54)$$

La longueur  $L$  du ressaut hydraulique est estimée par la formule suivante (Chin, 2000) :

$$L = 6y_2$$

tant que

$$4,5 < Fr < 13$$



**Application 5.13**

Le canal de fuite d'une centrale hydroélectrique a une section de forme rectangulaire de largeur 30,0m.

Le débit unitaire et la vitesse sont respectivement  $2,75\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$  et  $6,0\text{m}/\text{s}$ . Il faut trouver la hauteur du ressaut hydraulique et la puissance qui y est perdue (en kW).

La profondeur  $y_1$  juste en avant du ressaut est

$$y_1 = q/V_1 = (2,75\text{m}^3/\text{s}/\text{m}) / 6,0\text{m}/\text{s} = 0,458\text{m}.$$

La profondeur conjuguée  $y_2$  se calcule par l'équation (5.51) :

$$\frac{(2,75\text{m}^3/\text{s}/\text{m})^2}{9,81\text{m}/\text{s}^2} = 0,458\text{m} \cdot y_2 \left( \frac{0,458\text{m} + y_2}{2} \right)$$

soit

$$0,771\text{m}^3 = 0,458\text{m} \cdot y_2 \left( \frac{0,458\text{m} + y_2}{2} \right)$$

c'est-à-dire une équation du second degré :

$$y_2^2 + 0,458y_2 - 3,366 = 0.$$

La racine positive de cette équation est  $y_2 = 1,62\text{m}$ .

La hauteur du ressaut est  $h = y_2 - y_1 = 1,62\text{m} - 0,458\text{m} = 1,16\text{m}$ .

L'énergie perdue dans le ressaut se calcule par l'équation (5.54)

$$h_L = \frac{(1,62\text{m} - 0,458\text{m})^3}{4 \cdot 1,62\text{m} \cdot 0,458\text{m}} = 0,53\text{m}$$

La puissance perdue est donc

$$P = \rho g Q h_L = 1000\text{kg}/\text{m}^3 \cdot 9,81\text{m}/\text{s}^2 \cdot 2,75\text{m}^3/\text{s}/\text{m} \cdot 30,0\text{m} \cdot 0,53\text{m} = 429\text{kW}.$$

### 5.8.4 Bassin d'amortissement

Les vitesses à l'aval du ressaut (régime fluvial) sont inférieures aux vitesses à l'amont du ressaut (régime torrentiel). Cette propriété fait utiliser le ressaut comme dissipateur d'énergie pour réduire la vitesse de la lame d'eau à l'aval d'un coursier d'évacuateur de crue, d'une vanne de fond ou à la sortie d'un ponceau (figure 5.29).

Afin de confiner le ressaut hydraulique dans un espace déterminé et éviter l'affouillement de l'ouvrage et l'érosion des berges on construit un bassin d'amortissement dont les caractéristiques sont spécifiées par le Bureau Américain de Réclamation (USBR, 1987).

Selon la valeur du nombre de Froude l'aménagement du bassin d'amortissement se fera selon une des quatre configurations exposées ci-après.

Quand le nombre de Froude est inférieur à 2,5, il n'est pas nécessaire d'incorporer des aménagements spéciaux dans le bassin d'amortissement. Ce bassin de type I doit cependant avoir une longueur suffisante d'au moins  $4y_2$  pour contenir le ressaut.

Pour des nombres de Froude supérieurs à 4,5 et des vitesses d'écoulement à l'entrée supérieures à 15m/s le bassin de type II peut réduire la longueur  $L$  de 30% par rapport à un bassin ordinaire de type I (fig. 5.30). Cette longueur  $L_{II}$  se calcule par l'une ou l'autre de deux formules suivantes selon la valeur du nombre de Froude  $Fr_1$  en amont du ressaut.

$$L_{II} = D_2 [4 + 0,055 (Fr_1 - 4,5)] \quad \text{si} \quad 4,5 < Fr_1 < 10;$$

$$L_{II} = 4,35 D_2 \quad \text{si} \quad Fr_1 > 10$$

$D_1$  et  $D_2$  représentent respectivement les profondeurs  $y_1$  et  $y_2$  dans les équations (5.51) à (5.54).

Les blocs de chute situés à l'entrée du bassin servent de déflecteurs pour diriger une partie de l'eau dans le sens vertical et amorcer le mouvement tourbillonnaire du ressaut. Le seuil terminal denté est incliné selon une pente 2:1

Dans le bassin de type III, on ajoute des blocs d'amortissement pour stabiliser davantage le ressaut et réduire encore sa longueur d'approximativement 65% comparativement à un bassin ordinaire de type I. Malheureusement cet aménagement ne doit être utilisé que pour des vitesses d'écoulement en amont inférieures à 18m/s pour éviter des problèmes de cavitation. La longueur du bassin d'amortissement de type III se calcule par l'une des deux formules suivantes selon le nombre de Froude en amont du ressaut :

$$L_{\text{III}} = D_2 [2,4 + 0,073 (Fr_1 - 4,5)] \quad \text{si} \quad 4,5 < Fr_1 < 10$$

$$L_{\text{III}} = 2,8 D_2 \quad \text{si} \quad Fr > 10$$

Pour les nombres de Froude plus modérés ( $2,5 < Fr_1 < 4,5$ ), le bassin de type IV est préconisé pour contenir un ressaut oscillant. La longueur du bassin de type IV se calcule par la formule suivante :

$$L_{\text{IV}} = D_2 [5,2 + 0,4 (Fr_1 - 2,5)]$$

Pour les bassins d'amortissement de types III et IV,  $h_3$  et  $h_4$  sont calculés par :

$$h_3 = D_1 [1,30 + 0,164 (Fr_1 - 4)]$$

$$h_4 = D_1 [1,25 + 0,056 (Fr_1 - 4)]$$

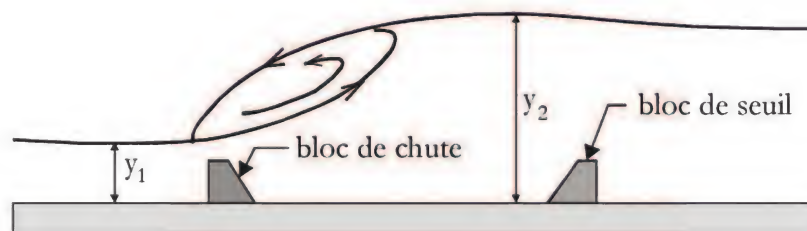


Fig. 5.29 Schéma de principe d'un bassin d'amortissement



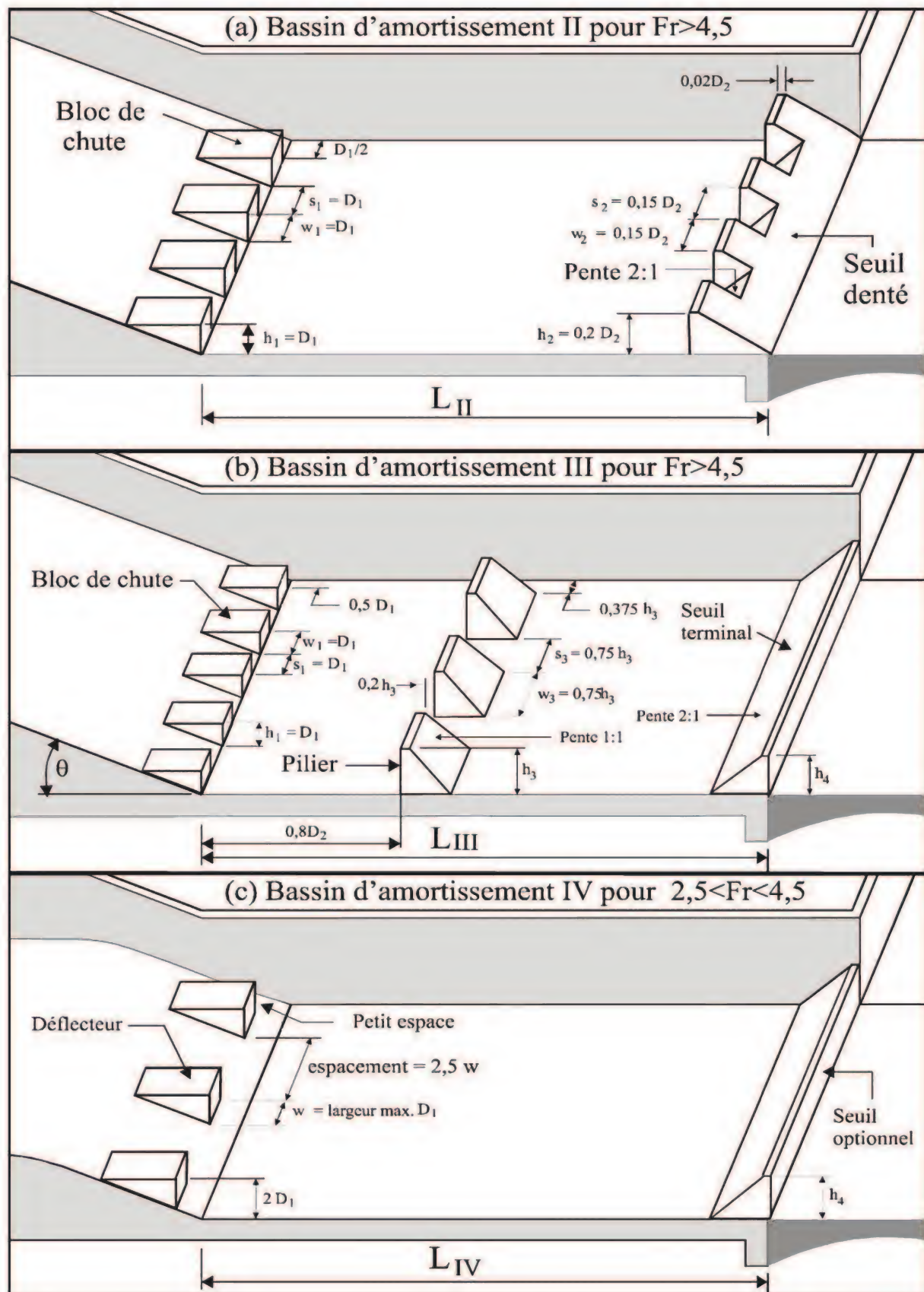


Fig. 5.30 Différents types de bassins d'amortissement  
Adapté de USBR (1958)

## RÉSUMÉ

- 1- Pour un écoulement uniforme, les propriétés géométriques et hydrauliques sont reliées par l'équation de Manning :

$$V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} S_f^{1/2} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S_f^{1/2}$$

- 2- Quand la section du canal est circulaire, le tableau 5.3 ou la figure 5.16 permettent de calculer les paramètres hydrauliques cherchés. On utilise dans ce cas les propriétés hydrauliques de la section coulant pleine :

$$V_p = \frac{0,3969}{n} D^{2/3} S_f^{1/2} \quad Q_p = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} S_f^{1/2}$$

- 3- L'écoulement est critique quand  $(Fr)^2 = Q^2 B / g A^3 = 1$ . Dans ce cas,  $V = V_c$ ,  $y = y_c$  et  $S_0 = S_c$ . Quand la section est rectangulaire, la profondeur  $y_c$  se

calcule par la relation  $y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$  ; autrement, on utilise la figure 5.22.

- 4- L'écoulement est supercritique (torrentiel ou rapide) quand  $Fr > 1$ .

Dans ce cas,  $V > V_c$ ,  $y < y_c$  et  $S_0 > S_c$ .

- 5- L'écoulement est subcritique (fluvial ou lent) quand  $Fr < 1$ .

Dans ce cas,  $V < V_c$ ,  $y > y_c$  et  $S_0 < S_c$ .

- 6- Pour un écoulement variant graduellement, les propriétés géométriques et hydrauliques sont calculées par intégration de l'équation de conservation de l'énergie écrite sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - Fr^2}$$

- 7- Pour un écoulement variant brusquement lors d'un ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire, les profondeurs conjuguées (avant et après le ressaut) sont reliées par la relation :

$$y_1 y_2 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = y_c^3 = \frac{q^2}{g}$$

- 8- La perte de charge par turbulence dans le ressaut hydraulique se calcule par la relation :

$$h_L = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2}$$

## EXERCICES

### Exercice 5.1

Un canal à section rectangulaire fait en béton ( $n = 0,013$ ) a une largeur de  $B = 5,0\text{m}$  et une pente de  $S_0 = 5 \times 10^{-4}$ . La profondeur normale est  $h_n = 1,0\text{m}$ .

- 1) Calculer le débit d'écoulement.
- 2) Calculer la profondeur pour un débit égal au double du débit trouvé en 1).

### Exercice 5.2

Une rivière dont la section peut être assimilée à une forme trapézoïdale, véhicule un débit de  $10,0\text{m}^3/\text{s}$ . La largeur du fond est  $b = 6,0\text{m}$  et la pente des berges est  $1,0$ . Le coefficient de Manning est  $n = 0,022$ . La pente longitudinale du fond est  $S_0 = 0,001\text{m}/\text{m}$ .

- 1) Calculer la profondeur normale d'écoulement.
- 2) Calculer le débit si la profondeur est le double de la valeur trouvée en 1).

### Exercice 5.3

Un canal de section trapézoïdale a une largeur au fond de  $b = 6,0\text{m}$  et une pente des berges définie par  $z = 2,0$ . La pente longitudinale est de  $S_0 = 5,0 \times 10^{-4}$  et le coefficient de Manning est  $n = 0,020$ .

Il faut calculer la vitesse d'écoulement et le débit pour les profondeurs d'écoulement  $0,3\text{m}$ ,  $0,9\text{m}$ ,  $1,5\text{m}$ ,  $2,1\text{m}$ ,  $3,0\text{m}$  et  $4,0\text{m}$ .

### Exercice 5.4

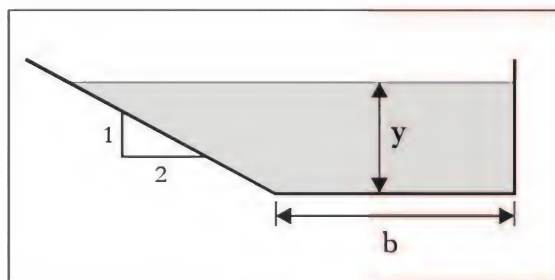


Fig. 5.31

Un canal de section mi-trapézoïdale mi-rectangulaire (figure 5.31) doit transporter un débit de  $10,0\text{m}^3/\text{s}$  à une vitesse permmissible  $V = 1,00\text{m}/\text{s}$ , sans que la profondeur dépasse  $1,0\text{m}$ . Une des rives est faite en béton, l'autre en enrochement et le fond est en terre. Le coefficient de Manning moyen a été estimé à  $n = 0,20$ . Il faut calculer la largeur  $b$  du fond.

### Exercice 5.5

Une conduite d'égout ayant un diamètre de  $305\text{mm}$  doit véhiculer un débit de  $100$  litres/seconde lorsqu'elle est pleine. Il faut calculer la profondeur et la vitesse d'écoulement lorsque cette conduite est  $75\%$  pleine et  $30\%$  pleine. Il faut calculer la pente de cette conduite ( $n = 0,014$ ).



**Exercice 5.6**

Dans une conduite d'égout à section circulaire de diamètre  $D$ , la profondeur de l'eau est  $h = 0,75D$  lorsque le débit qui y circule est  $Q = 0,14\text{m}^3/\text{s}$ . Quand la conduite transporte le débit minimum de temps sec  $Q = 0,03\text{m}^3/\text{s}$ , la vitesse d'écoulement est  $V = 0,6\text{m/s}$ .

Il faut trouver le diamètre de cette conduite, sa pente ainsi que le débit maximum qu'elle peut véhiculer à surface libre ( $n = 0,015$ ).

**Exercice 5.7**

Deux conduites circulaires de diamètres identiques  $D = 1,54\text{m}$  et de coefficient de Manning  $n = 0,025$  sont placées en parallèle pour drainer un ruisseau. On désire remplacer ces conduites par une seule conduite à section rectangulaire dont la largeur est  $1,54\text{m}$  et le coefficient de Manning  $n = 0,012$ .

Quelle doit être la hauteur de la nouvelle conduite à section rectangulaire?  
On suppose que dans tous les cas la sortie est libre.

**Exercice 5.8**

Un canal à section rectangulaire fait en béton ( $n = 0,013$ ), transporte un débit de  $5,0\text{m}^3/\text{s}$ . Il faut calculer la profondeur, la vitesse et la pente critiques lorsque la largeur est  $B = 4,0\text{m}$ .

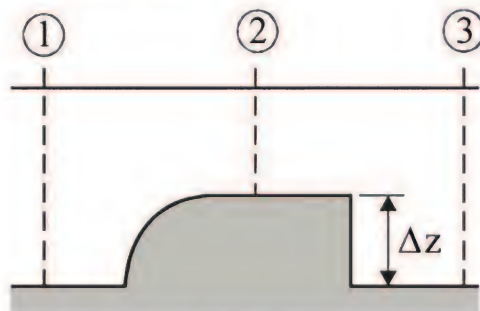
**Exercice 5.9**

Fig. 5.32

Un canal à section rectangulaire de largeur  $B = 10,0\text{m}$  comporte une surélévation de hauteur  $\Delta z$  à partir du fond, tel que montré sur la figure 5.32.

Dans la section (3) de l'écoulement, la profondeur est de  $1,0\text{m}$  et la vitesse d'écoulement est de  $5,0\text{m/s}$ .

- 1) Il faut trouver la surélévation  $\Delta z$  qui rend l'écoulement critique dans la section 2.
- 2) Quel est le régime d'écoulement dans la section 1?

**Exercice 5.10**

Dans le cadre d'un aménagement urbain, on doit réduire la largeur d'un cours d'eau de section rectangulaire, tel que montré sur la figure 5.33.

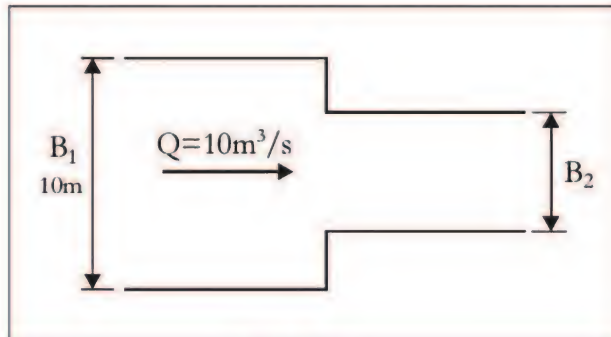


Fig. 5.33

Le coefficient de Manning est  $n = 0,020$  et la pente longitudinale du fond est  $S_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ m/m}$ .

1) Quelle est la largeur minimum permmissible  $B_2$  qui ne produit aucun changement sur les conditions d'écoulement en amont?

2) Calculer la nouvelle profondeur en amont si la largeur  $B_2$  est égale à la moitié de la valeur trouvée en 1).

**Exercice 5.11**

Un canal rectangulaire de largeur  $B = 15 \text{ m}$  et de pente  $S_0 = 1,0 \times 10^{-5} \text{ m/m}$  véhicule un débit  $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ . À un point du canal, on a observé une profondeur  $y_1 = 3,0 \text{ m}$ . Le coefficient de Manning est  $n = 0,025$ .

À quelle distance de ce point doit-on se déplacer pour trouver la profondeur  $y_2 = 3,25 \text{ m}$ ? Doit-on chercher cette profondeur vers l'amont ou vers l'aval du point d'observation?

**Exercice 5.12**

Un canal rectangulaire ayant une largeur de  $9,0 \text{ m}$  relie deux lacs, tel que montré sur la figure 5.34. Le coefficient de Manning est de  $n = 0,015$ .

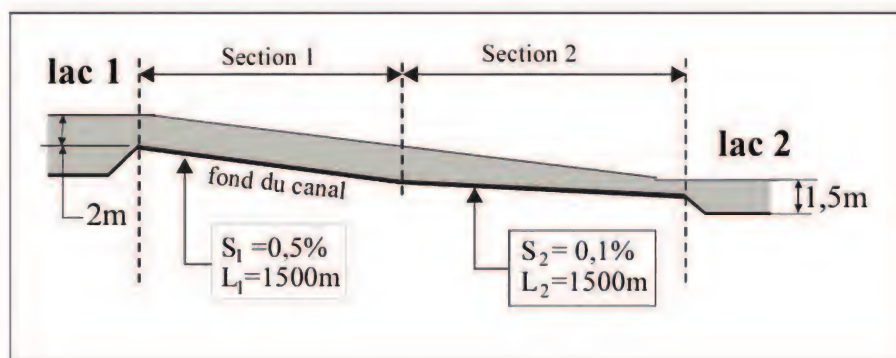


Fig. 5.34

Il faut calculer le débit d'écoulement dans ce canal et tracer l'allure de la surface libre dans le canal.



**Exercice 5.13**

Une rivière dont la section peut être assimilée à une forme rectangulaire déverse un débit de  $15,0\text{m}^3/\text{s}$  dans un lac, tel que montré sur la figure 5.35.

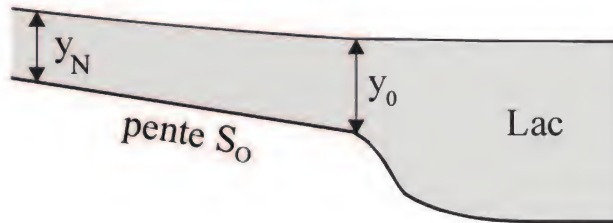


Fig. 5.35

La rivière a une largeur de  $10,0\text{m}$ , un coefficient de Manning de  $0,025$  et une pente de  $0,90\%$ . Le niveau de la surface libre du lac est situé à  $4,0\text{m}$  au-dessus de la profondeur normale dans la rivière. On suppose que le tronçon de rivière est assez long pour que l'effet de remous du lac ne l'affecte pas en totalité

Il faut tracer la courbe de remous à l'aide du calcul de trois profondeurs entre  $y_N$  et  $y_0$ .

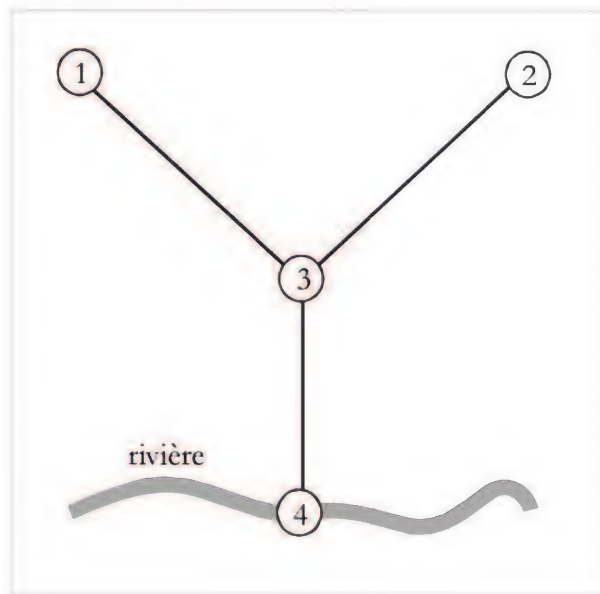
**Exercice 5.14**

Fig. 536

Soit le système de drainage pluvial schématisé par la figure 5.36.

L'exutoire du réseau (nœud 4) est situé dans un cours d'eau où le niveau en temps d'orage atteint  $24,0\text{m}$ . Le tableau ci-joint fournit les débits de pointe en temps d'orage, les diamètres, les longueurs et toutes les cotes pertinentes.

Il faut tracer la ligne piézométrique selon le chemin 1, 3 et 4, puis selon le chemin 2, 3 et 4. Il faut indiquer les endroits de mise en charge et les endroits d'inondation.

Il faut aussi calculer les diamètres nécessaires pour éliminer toutes les mises en charge en utilisant la liste des diamètres standard fournie ci-après. Utiliser  $n = 0,013$ .

Conduite		Débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	diamètre (m)	Cote au sol (m)		Cote du radier (m)		Longueur (m)
				amont	aval	amont	aval	
1	3	6	1,37	30,5	29,0	26,15	26,00	100
2	3	4	0,915	30,5	29,0	25,90	25,50	100
3	4	15	2,44	29,0	28,5	25,50	24,25	500

Liste des diamètres standard disponibles (en millimètres) :

255    305    380    460    535    610    760    915    1065    1220  
1370    1525    1830    2135    2440    2745    3050    3350



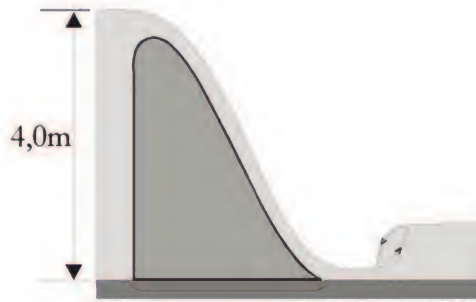
**Exercice 5.15**

Fig. 5.37

Un barrage déversoir de largeur 10,0m déverse un débit de  $10,0\text{m}^3/\text{s}$  (figure 5.37).

- 1) Il faut calculer les profondeurs conjuguées du ressaut (on néglige les pertes de charge sur le déversoir).
- 2) Calculer les vitesses d'écoulement en amont et en aval du ressaut
- 3) Lequel des quatre bassins d'amortissement préconiserez-vous?

**Exercice 5.16**

Lors d'un ressaut hydraulique dans un canal à section rectangulaire de largeur  $B = 5,0\text{m}$ , on a mesuré les profondeurs conjuguées  $y_1 = 0,3\text{m}$  et  $y_2 = 1,8\text{m}$ . Pouvez-vous estimer le débit et la profondeur critique d'écoulement?

---

## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 5

Chaudry, M. H. (1993), *Open-Channel Flows*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice-Hall.

Chow, V.T. (1988), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Fortier, S. et Scobey, F.C. (1926). «Permissible Canal Velocities», *Transactions*, vol. 89, American Society of Civil Engineers, p. 940-956.

French, R. (1985), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Henderson, E.M. (1966), *Open-Channel Flow*, Londres, Macmillan.

U.S. Army Corps of Engineers (1995), *Hydraulic Reference Manual*, Version 1.0, Davis (CA), Hydrologic Engineering Center,.

USBR (1958), «Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators», *Engineering Monograph*, n° 25.

## SYMBOLES DU CHAPITRE 5

$A$	: section d'écoulement, section mouillée, surface
$A_c$	: section critique d'écoulement
$b$	: largeur au radier
$B$	: largeur au plan d'eau
$d$	: profondeur verticale
$D$	: diamètre
$E$	: énergie spécifique
$E_c$	: énergie spécifique critique
$E_s$	: énergie spécifique
$F_{ext}$	: force extérieure
$Fr$	: nombre de Froude
$g$	: accélération due à la gravité
$h$	: hauteur verticale, épaisseur d'eau perpendiculairement au fond
$h_L$	: charge (énergie) perdue dans un ressaut
$H$	: charge hydraulique
$J$	: perte de charge par frottement
$L$	: longueur
$M$	: type de courbe de remous
$n$	: coefficient de Manning, direction normale à un plan
$P$	: périmètre mouillé, pression
$P_{atm}$	: pression atmosphérique
$q$	: débit unitaire
$Q$	: débit volumique
$R$	: rayon
$R_{H1}$	: rayon hydraulique
$S$	: pente
$S_c$	: pente critique
$S_f$	: pente de la ligne d'énergie
$S_0$	: pente du fond d'un canal
$v$	: vitesse d'écoulement
$V$	: vitesse d'écoulement
$V_c$	: vitesse critique d'écoulement
$V_{moy}$	: vitesse moyenne d'écoulement
$x$	: abscisse, distance mesurée parallèlement au fond d'un canal
$y$	: ordonnée, hauteur d'eau, profondeur, profondeur normale, épaisseur de lame d'eau
$y_c$	: profondeur critique
$y_n$	: profondeur normale
$y_{ref}$	: profondeur de référence
$y_1, y_2$	: profondeurs conjuguées
$z$	: cote, inverse d'une pente
$\alpha$	: coefficient de correction
$\Delta$	: variation
$\theta$	: angle
$\rho$	: masse volumique



# Chapitre 6

## *Écoulements à travers les déversoirs et les orifices*

### Objectifs

- 1- Développer les équations de calcul du débit déversé par les orifices et les déversoirs.
- 2- Connaître le principe des orifices et des déversoirs utilisés comme instruments de mesure du débit.
- 3- Analyser les incertitudes de mesure du débit par les déversoirs.

## 6.1 Définitions et généralités

Les déversoirs et les orifices sont des dispositifs qu'on utilise pour mesurer ou contrôler le débit d'écoulement.

Le *déversoir* est constitué d'une paroi mince ou épaisse disposée verticalement et munie d'une ouverture sur sa partie supérieure. Cette ouverture est souvent rectangulaire ou triangulaire (figure 6.1) mais peut aussi être trapézoïdale, parabolique, ...

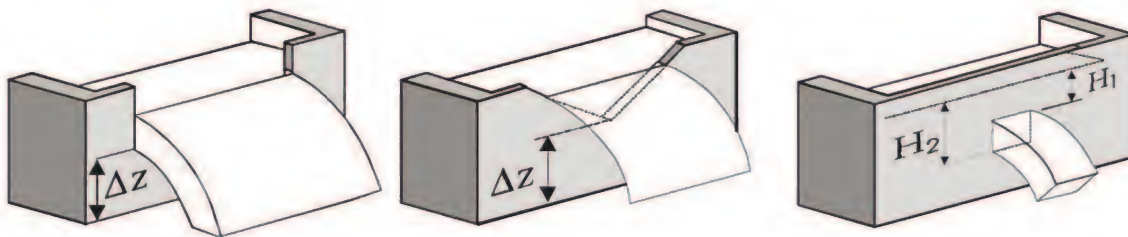


Fig. 6.1 Déversoirs et orifice

Le niveau le plus bas de l'ouverture est situé à une hauteur de crête minimale ( $\Delta Z$ ) par rapport au fond et assure un écoulement critique par-dessus le déversoir.

Les déversoirs ont d'autres usages que la mesure du débit. En milieu rural, le barrage-déversoir est utilisé pour la gestion des eaux et le laminage des crues. Le déversoir de sécurité permet d'évacuer le surplus de débit lorsqu'on craint pour la sécurité des digues. La conception des déversoirs de crues n'est pas abordée dans cet ouvrage. Le lecteur intéressé par cet aspect peut consulter, par exemple, l'ouvrage de Lencastre (1999).

En milieu urbain, les déversoirs d'orage permettent le déversement dans la rivière des surplus des eaux usées mélangées avec les eaux pluviales. Ces surplus sont causés soit par la limitation de transport dans le réseau soit par une limitation dans la capacité de la station d'épuration.

Les *orifices* sont des ouvertures généralement de forme circulaire ou rectangulaire mais ils peuvent avoir n'importe quelle autre forme. Ils sont pratiqués soit sur les parois verticales soit dans le fond d'une conduite ou d'un bassin de rétention pour permettre de contrôler le débit en aval.

## 6.2 Écoulements à travers un orifice

Afin d'obtenir une formule de calcul du débit qui passe par un orifice, considérons la figure 6.2 montrant en coupe une paroi mince pourvue d'un orifice rectangulaire de largeur  $L$ . Quand la sortie est non submergée, l'orifice est non noyé.

Le débit  $Q$  qui passe par l'orifice se calcule par l'équation suivante :

$$Q = L \int v \, dy \quad (6.1)$$

où  $v$  est la vitesse d'écoulement dans l'orifice à la profondeur  $y$ .

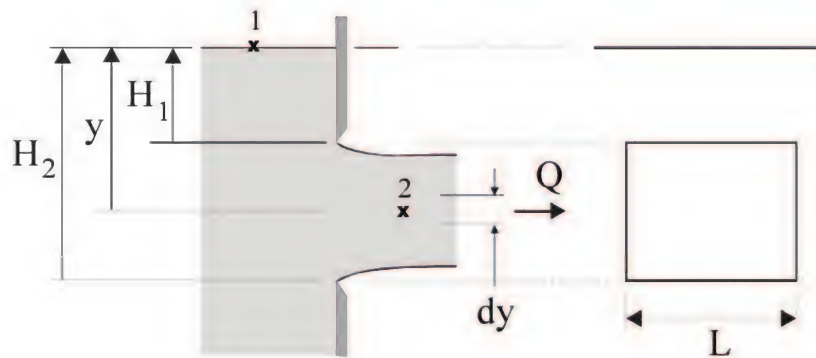


Fig. 6.2 Orifice rectangulaire dans une paroi mince

L'équation de Bernoulli appliquée entre les points 1 et 2, en négligeant les pertes de charge, s'écrit :

$$\frac{V_1^2}{2g} + y = \frac{V_2^2}{2g} \quad (6.2)$$

Le point 2 doit être pris assez éloigné de la sortie où les lignes de courant sont incurvées. Quand les lignes de courant ne sont pas rectilignes, la loi de l'hydrostatique ne s'applique pas dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

L'équation de calcul du débit devient alors :

$$Q = L\sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} \left( y + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{1/2} dy \quad (6.3)$$



En intégrant (6.3) on obtient :

$$Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} \left[ \left( H_2 + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left( H_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (6.4)$$

Si on néglige l'énergie cinétique d'approche  $V_1^2/2g$ , (6.4) devient :

$$Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}) \quad (6.5)$$

On peut obtenir une autre formule du débit, qui donne sensiblement le même résultat, en appliquant directement l'équation de Bernoulli entre le point 1 situé à la surface libre du réservoir et le point 2 situé au centre de l'orifice à une profondeur  $h$  :

$$V = \sqrt{2gh} \quad (\text{formule de Torricelli}) \quad (6.6)$$

et  $Q = AV$ , soit :

$$Q = A\sqrt{2gh} \quad (6.7)$$

Cette formule est valable aussi bien pour une section rectangulaire que circulaire.

Le débit qu'on vient de calculer est un débit théorique. Le débit réel est plus faible en raison de la contraction de la section d'écoulement au niveau de l'orifice et l'existence d'une perte de charge singulière à la sortie. On multiplie alors le débit théorique par un coefficient de correction  $m$  pour obtenir le débit réel.

Pour tenir compte de la contraction de la section d'écoulement, on écrit :

$$A_{\text{réelle}} = C_c A \quad (6.8)$$

où  $A_{\text{réelle}}$  est la section d'écoulement au niveau de la section contractée,  
 $A$  est la section de l'orifice ( $\pi d^2/4$  si l'orifice est circulaire ou  $L(H_2 - H_1)$  si l'orifice est rectangulaire).

Plusieurs expériences ont démontré que pour un orifice à paroi mince  $C_c = 0,60$ .

Par ailleurs, compte tenu des pertes de charge, la vitesse réelle d'écoulement est plus faible que la vitesse théorique, si bien qu'on écrit :

$$V_{\text{réelle}} = C_v \sqrt{2gh} \quad (6.9)$$

Des expériences montrent que pour un orifice à paroi mince  $C_v = 0,98$ .

On doit donc multiplier le débit théorique par un coefficient de correction  $m = C_c C_v = 0,59$  pour obtenir le débit réel à travers un orifice à paroi mince :

$$Q = mA\sqrt{2gh} \quad (6.10)$$

Pour un orifice à paroi moulée (figure 6.3), le coefficient  $m$  peut atteindre 0,96.

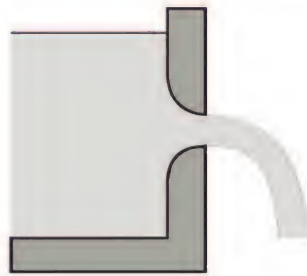


Fig. 6.3 Orifice à paroi moulée

Parfois l'orifice peut être terminé par un bout de tuyau sortant, de longueur égale au double ou au triple du diamètre de l'orifice (figure 6.4).

Dans ce cas, en utilisant un coefficient de perte de charge singulière  $K = 0,5$ , on peut facilement démontrer que le coefficient  $C_v$  est égal à 0,82 et donc que :

$$V_{\text{réelle}} = 0,82V \quad (6.11)$$

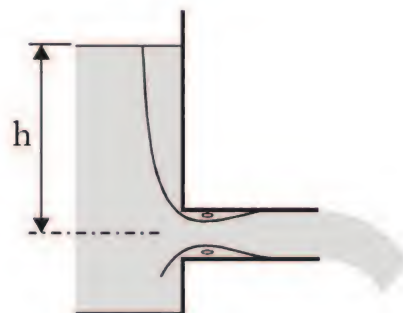


Fig. 6.4 Orifice avec tuyau sortant

Par ailleurs, le coefficient de contraction est  $C_c = 1$ , si bien que le débit réel  $Q$  est :

$$Q = 0,82 A \sqrt{2gh} \quad (6.12)$$

### 6.3 Déversoir à paroi mince et rectangulaire

Un déversoir est dit à paroi mince lorsque le seuil est terminé par une arête vive de faible épaisseur (1 à 2 millimètres), tel que montré sur la figure 6.5.

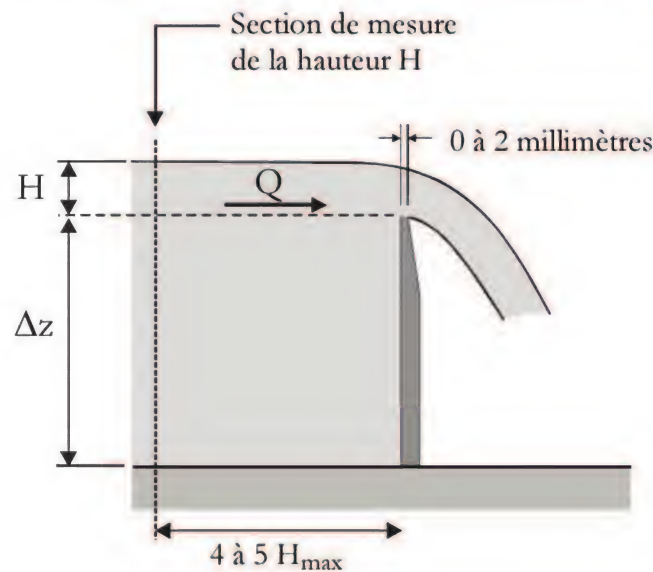


Fig. 6.5 Déversoir à paroi mince

L'écoulement par un déversoir s'obtient simplement en posant  $H_1 = 0$  et  $H_2 = H$  dans l'équation (6.5), les pertes de charge et l'énergie cinétique d'approche étant considérées négligeables :

$$Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.13)$$

C'est la formule établie par Poleni au 18<sup>e</sup> siècle. Pour tenir compte des pertes de charge et de la vitesse d'approche, on écrit la relation (6.13) sous la forme suivante :

$$Q = \mu L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.14)$$

Le coefficient  $\mu$ , qui ne peut être déterminé qu'expérimentalement, a fait l'objet de recherches extensives depuis plus de cent cinquante ans en Europe et en Amérique du Nord.



Francis a mené aux États-Unis plusieurs expériences entre 1848 et 1852 pour tenter d'établir une expression du débit déversé. Il a fait varier la largeur  $L$  du déversoir de 1m à 5m et la hauteur de charge  $H$  de 0,2m à 0,5m pour trouver la relation suivante pour un déversoir sans contraction latérale :

$$Q = 0,415 L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.15)$$

Bien que d'autres formules plus complexes aient été développées par la suite, cette valeur de  $\mu$  donne un bon ordre de grandeur du débit déversé.

Francis a proposé aussi la formule suivante pour un déversoir avec contraction latérale (figure 6.6):

$$Q = 0,415 \sqrt{2g} \left( L - \frac{H}{5} \right) H^{3/2} \quad (6.16)$$

On constate donc que, lorsqu'il y a une contraction dans le déversoir, la largeur effective est  $L - 0,2H$ , tant que  $L/H > 3$ .

Hégley a proposé en 1921 la formule suivante pour estimer le coefficient  $\mu$  pour un déversoir avec contraction latérale (figure 6.6) :

$$\mu = \left( 0,405 + \frac{0,0027}{H} - 0,03 \frac{L_1 - L}{L_1} \right) \left[ 1 + 0,55 \left( \frac{LH}{L_1(H + \Delta Z)} \right)^2 \right] \quad (6.17)$$

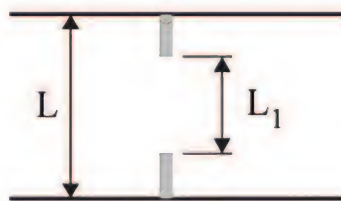


Fig. 6.6 Déversoir avec contraction latérale

En fait, plusieurs études expérimentales ont démontré que les facteurs qui influencent le plus la valeur du coefficient  $\mu$  sont le rapport  $H/\Delta Z$  et le degré de contraction de la section d'écoulement  $L_1/L$ . Le tableau 6.1 fournit le coefficient de débit  $\mu$  en fonction de ces deux paramètres.

$L_1/L$	$\mu$	$L_1/L$	$\mu$
1	$0,401 + 0,05 H/\Delta Z$	0,5	$0,395 + 0,007 H/\Delta Z$
0,9	$0,399 + 0,042 H/\Delta Z$	0,4	$0,394 + 0,004 H/\Delta Z$
0,8	$0,398 + 0,030 H/\Delta Z$	0,3	$0,393 + 0,001 H/\Delta Z$
0,7	$0,397 + 0,020 H/\Delta Z$	0,2	$0,393 - 0,001 H/\Delta Z$
0,6	$0,395 + 0,012 H/\Delta Z$	0,1	$0,393 - 0,001 H/\Delta Z$
		0	$0,390 - 0,001 H/\Delta Z$
			$0,390 - 0,001 H/\Delta Z$

Tableau 6.1 Coefficient de débit  $m$  pour un déversoir rectangulaire avec ou sans contraction latérale.

Adapté de NF X 10-311 (1983)

## 6.4 Déversoir triangulaire

Quand le débit à mesurer est faible, le déversoir triangulaire (figure 6.7) est plus approprié que le déversoir rectangulaire. Lencastre (1999) recommande d'utiliser systématiquement un déversoir triangulaire dès que le débit devient inférieur à 30 litres par seconde.

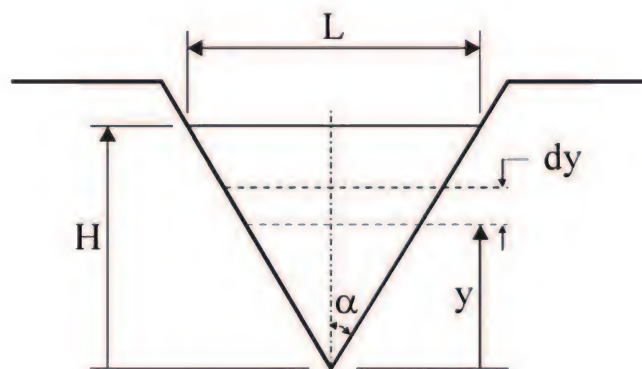


Fig. 6.7 Déversoir triangulaire

Conformément à (1.3), le débit se calcule par l'expression suivante

$$Q = \int V \, dA \quad (6.18)$$

En négligeant la vitesse d'approche, la vitesse  $V$  se calcule à partir de l'équation de Bernoulli :

$$V = \sqrt{2gy} \quad (6.19)$$

La section d'écoulement  $dA$  se calcule à partir de la relation des triangles semblables :

$$dA = \frac{L}{H} (H-y) dy \quad (6.20)$$

Après substitution de (6.19) et de (6.20) dans (6.18) et intégration entre  $y = 0$  et  $y = H$ , on obtient :

$$Q = \frac{4}{15} L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.21)$$

ou encore, avec  $L = 2H \tan(\alpha)$  :

$$Q = \frac{8}{15} \tan(\alpha) \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (6.22)$$

En introduisant le coefficient de débit  $\mu$  dans (6.22), on obtient :

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan(\alpha) \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (6.23)$$

Plusieurs formules ont été proposées pour estimer le coefficient de débit  $\mu$ . Thomson a étudié en 1861 un déversoir triangulaire ayant un angle d'ouverture  $\alpha = 90$  degrés et a proposé l'expression suivante pour le débit :

$$Q = 1,42 H^{5/2} \quad (6.24)$$

Ceci revient à utiliser une valeur de  $\mu = 0,593$ , valable pour  $0,05\text{m} < H < 0,18\text{m}$ .

À toute fin pratique, le coefficient  $\mu$  ne varie pas beaucoup avec l'angle d'ouverture  $\alpha$  et une valeur moyenne de  $\mu = 0,58$  peut être utilisée d'une manière générale.

Le déversoir rectangulaire est plus précis (erreur relative d'environ 1%) que le déversoir triangulaire pour les grands débits. Cependant, le déversoir triangulaire est plus sensible que le déversoir rectangulaire. Un appareil original permet de combiner les avantages des deux déversoirs.



La combinaison de déversoirs rectangulaire et triangulaire est montrée sur la figure 6.8.

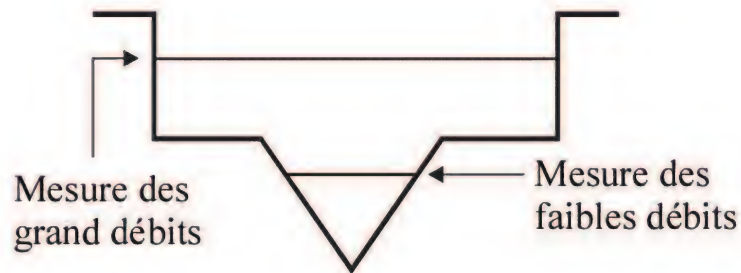


Fig. 6.8 Combinaison de déversoirs rectangulaire et triangulaire

Pour les faibles débits, seule la partie triangulaire du déversoir est utilisée. Pour les grands débits, la partie rectangulaire du déversoir entre en jeu. Ce déversoir combiné, qui est maintenant d'usage courant, comporte une échelle graduée dont la lecture fournit directement le débit d'écoulement.

## 6.5 Écoulement à travers un déversoir à seuil épais

Un déversoir est dit à seuil épais lorsque la surélévation de la crête s'étale sur une assez grande distance  $W$  pour obtenir une surface libre horizontale et parallèle au seuil (figure 6.9). Pratiquement, on suppose que le déversoir est à seuil épais si  $W > 3H$ .

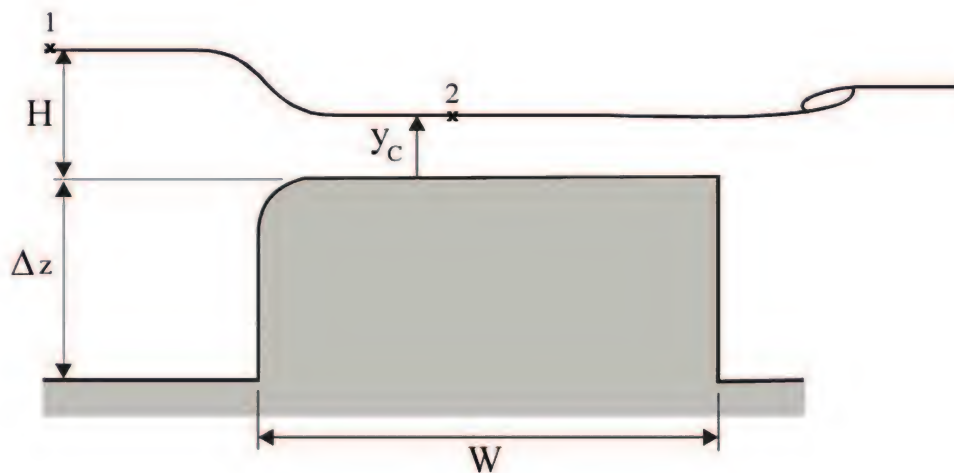


Fig. 6.9 Déversoir à seuil épais

En écrivant l'équation de Bernoulli entre un point de la surface libre situé en 1 et un autre point situé en 2, on obtient :

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

Si le seuil est assez surélevé, l'écoulement y est critique, si bien que l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$H + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} + h_f \quad (6.25)$$

et l'équation de calcul du débit s'écrit :

$$Q = A_c V_c \quad (6.26)$$

La relation entre  $V_c$  et  $y_c$  a été établie pour l'écoulement critique sous la forme de l'équation (5.28). Par ailleurs, si la distance entre les points 1 et 2 n'est pas très grande ( $W \leq 10H$ ), on néglige  $h_f$  ( $h_f = 0$ ) et on introduit un coefficient de correction  $C_d$ .

Comme il n'est pas pratique de mesurer la vitesse d'approche  $V_1$ , on néglige le terme  $V_1^2/2g$  et on introduit un coefficient de correction de l'énergie cinétique  $C_v$ . L'équation de Bernoulli (5.38) s'écrit dans ce cas :

$$y_c = \frac{2}{3} H \quad (6.27)$$

L'équation de calcul du débit (6.26) s'écrit :

$$Q = C_d C_v L \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} \sqrt{9,81} H^{3/2}$$

soit

$$Q = 1.7 C_q L H^{3/2} \quad (6.28)$$

Le coefficient  $C_q$  peut être estimé par la formule suivante (Chow, 1988) :

$$C_q = \frac{0,65}{1 + \frac{H}{\Delta Z}} \quad (6.29)$$

Ce déversoir n'est pas utilisé en pratique pour la mesure du débit car les coefficients  $C_d$  et  $C_v$  dépendent de la forme du déversoir, de sa longueur et de sa rugosité.

## 6.6 Canaux jaugeurs Parshall

Lorsque les collecteurs transportent des charges solides importantes, comme à l'entrée d'une station d'épuration, l'utilisation d'un canal jaugeur est recommandée pour mesurer le débit d'écoulement. En effet, contrairement aux déversoirs vus précédemment, le canal jaugeur ne contient pas de seuil susceptible de retenir les matières en suspension. Les canaux jaugeurs réduisent la largeur du canal et peuvent aussi comporter une surélévation du fond pour créer une section de contrôle où la profondeur est critique.

À titre d'exemple, le canal Parshall (1926) dispose d'un convergent aboutissant à une contraction suivie d'un divergent (figure 6.10)

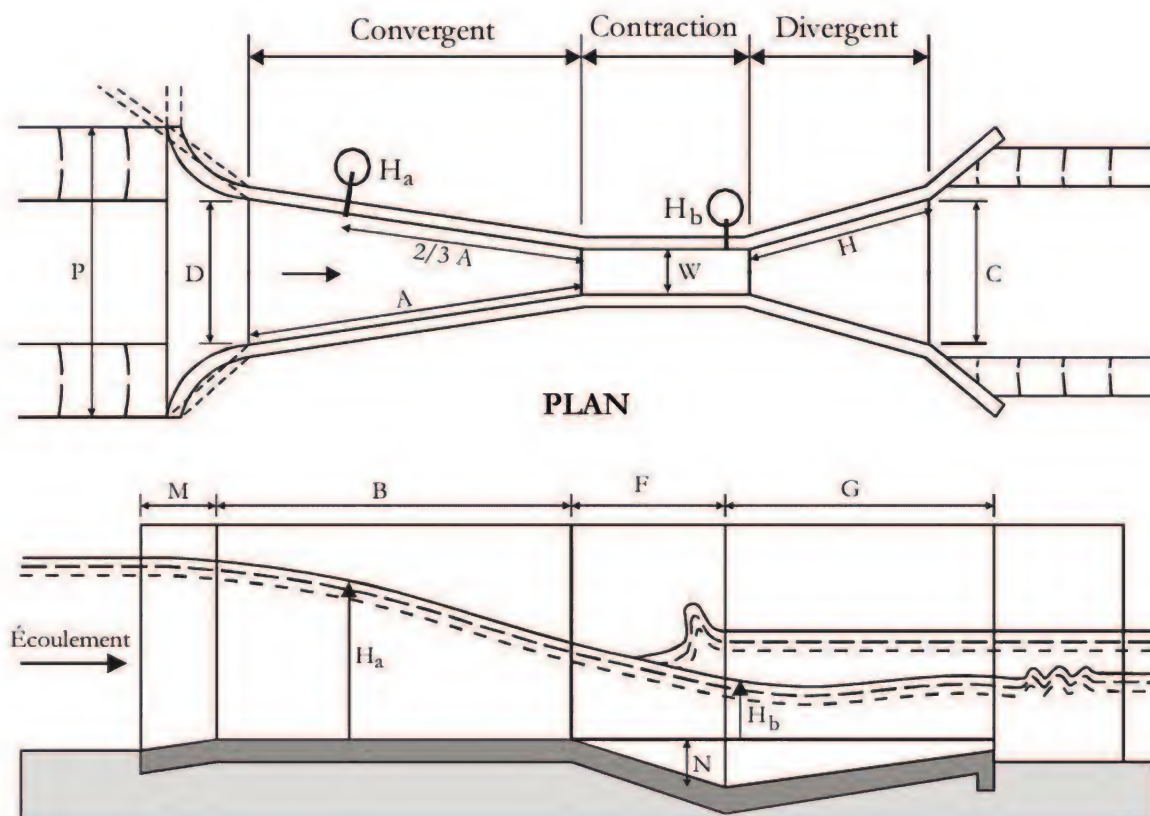


Fig. 6.10 Dimensions standard du canal jaugeur Parshall

Adapté de USBR (1978)



Selon les dimensions des longueurs A, B, C, D, E, F..., il existe plusieurs grandeurs standard du canal Parshall appropriées pour différentes gammes de débits à mesurer (Chow, 1988).

Le principe de mesure du débit est basé sur la notion de la profondeur critique dans la section de contrôle (section contractée). La relation entre cette profondeur critique et le débit permet de développer une relation niveau-débit exploitable pour la mesure du débit. La profondeur de l'eau est mesurée à deux endroits dans le canal Parshall :  $H_a$  mesurée dans le convergent et  $H_b$  mesurée à la sortie de la section contractée.

Le passage d'un écoulement supercritique à un écoulement subcritique à la sortie s'accompagne normalement d'un ressaut hydraulique. Quand le ressaut hydraulique à la sortie n'est pas noyé, le débit d'écoulement ne dépend que de la profondeur  $H_a$  mesurée dans le convergent selon la relation (Chin, 2000) :

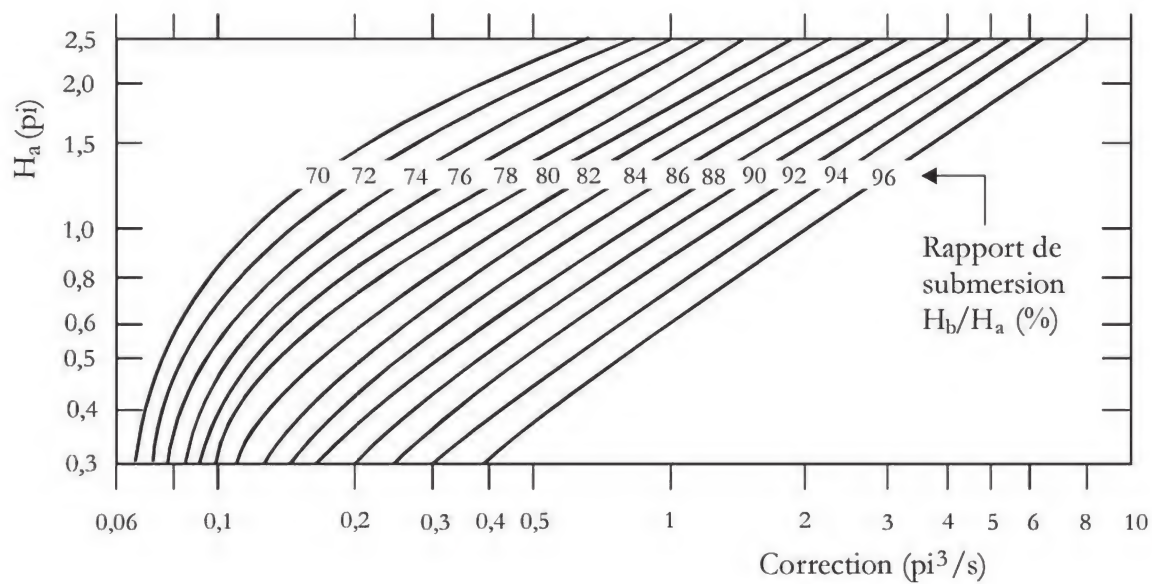
$$Q = 4EH_a^{1,522}W^{0,026} \quad \text{pour } W < 8 \text{ pieds} \quad (6.30)$$

$$Q = (3,6875W + 2,5)H_a^{1,6} \quad \text{pour } 10 \text{ pieds} < W < 50 \text{ pieds} \quad (6.31)$$

Quand le ressaut à la sortie est submergé, on calcule le rapport entre la profondeur  $H_b$  mesurée dans la section contractée et la profondeur  $H_a$  mesurée dans le convergent :  $H_b/H_a$ . Si ce rapport de submersion excède une valeur critique, qui dépend de la largeur  $W$  au niveau de la section contractée (tableau 6.2), les débits obtenus à l'aide des formules (6.30) ou (6.31) doivent être corrigés. La figure 6.11 fournit le débit qu'il faut retrancher aux valeurs obtenues à l'aide des formules (6.30) ou (6.31), selon la profondeur dans le convergent et le rapport de submersion  $H_b/H_a$ .

Largeur W	$\left(\frac{H_b}{H_a}\right)_{\text{critique}}$
De 6po à 9po	0,6
De 1pi à 8pi	0,7
De 8pi à 50pi	0,8

Tableau 6.2 Critère de submersion dans le canal Parshall

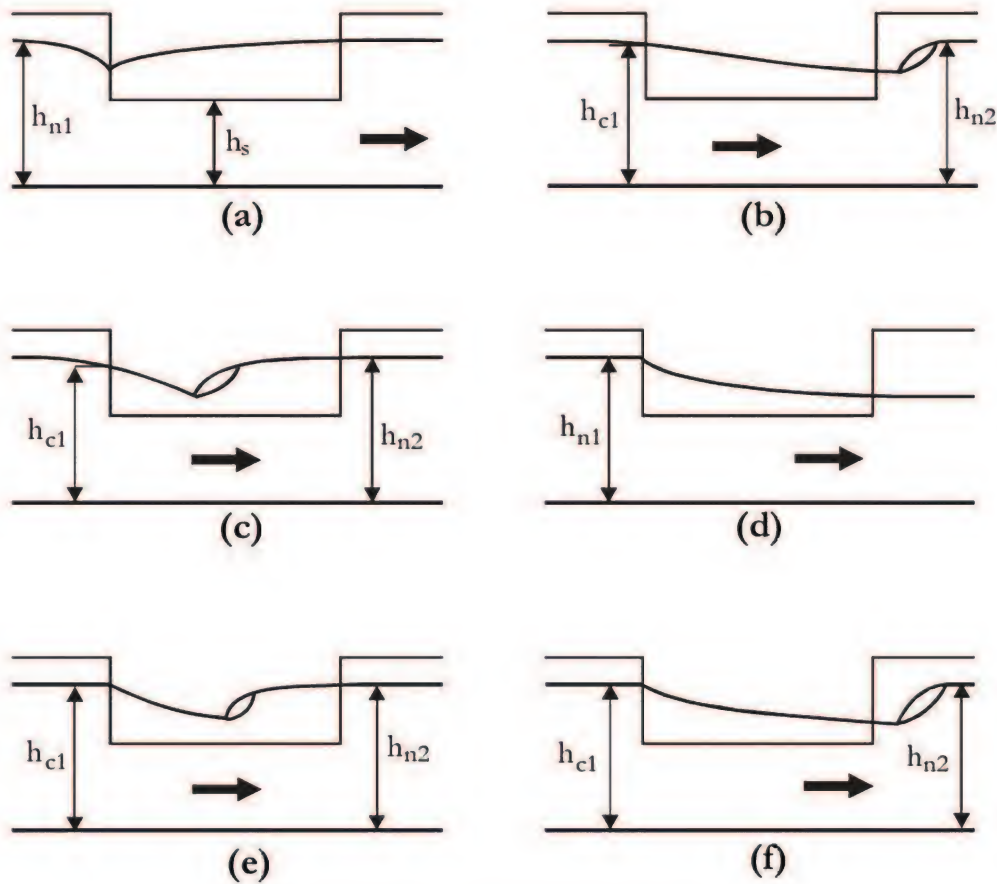


**Fig. 6.11 Débit de correction pour écoulement noyé**  
Adapté de Chin (2000)

## 6.7 Déversoir latéral

### 6.7.1 Différents types d'écoulement

Contrairement aux déversoirs vus précédemment, disposés au front de l'écoulement, le déversoir latéral est disposé dans la paroi du canal parallèlement à son axe. Ce type de déversoir n'est pas utilisé en pratique pour la mesure du débit mais plutôt pour déverser le trop-plein d'orage dans le milieu naturel. Une analyse de l'équation du mouvement (6.29), similaire à celle effectuée au paragraphe 6.7.3, permet de dégager les six types possibles de la ligne d'eau le long d'un déversoir latéral (figure 6.12).



$h_{n1}$  : hauteur normale dans la conduite amont  
 $h_{c1}$  : hauteur critique dans la conduite amont  
 $h_{n2}$  : hauteur normale dans la conduite aval  
 $h_s$  : hauteur du seuil

Type d'écoulement	Pente le long du seuil	Pente à l'aval	Conditions d'écoulement
cas (a)	pente faible	pente faible	$h_{n1} > h_{c1}$ et $h_s < h_{c1}$
cas (b)	pente faible	pente faible	$h_{n1} > h_{c1}$ et $h_s < h_{c1}$
cas (c)	pente faible	pente faible	$h_{n1} > h_{c1}$ et $h_s < h_{c1}$
cas (d)	pente forte	pente forte	$h_{n1} < h_{c1}$
cas (e)	pente forte	pente faible	$h_{n1} < h_{c1}$
cas (f)	pente forte	pente faible	$h_{n1} < h_{c1}$

Fig. 6.12 Types de lignes d'eau pour le déversoir latéral

Adapté de Chocat (1997) d'après Ministère (1986)

### 6.7.2 Formule De Marchi

Le débit déversé dépend du régime d'écoulement, des caractéristiques du déversoir et principalement de la hauteur de charge  $H$  au-dessus de la crête. Dans le cas d'un déversoir latéral, la profondeur d'écoulement  $h$  ( $h = \Delta Z + H$ )



varie le long du déversoir et peut être calculée en résolvant l'équation du mouvement variant graduellement démontrée au chapitre 5. Avec les notations habituelles, on obtient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_r - \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{1 - Fr^2} \quad (6.29)$$

De Marchi (Chocat, 1997) a proposé la formule suivante pour calculer le débit unitaire  $dQ/dx$  :

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.30)$$

Le coefficient de Marchi  $\mu$  se calcule en fonction du nombre de Froude en amont (tableau 6.3).

Les équations (6.29) et (6.30) peuvent être résolues simultanément par une méthode de différences finies pour trouver les profondeurs  $h$  et le débit déversé (RAMZI, 2003).

Valeur de Fr	$\mu$
$Fr < 0,6$	$0,611 \sqrt{1 - \frac{3Fr^2}{Fr^2 + 2}}$
$0,6 < Fr < 1$	$0,45 - 0,06(Fr - 0,6)$
$1 < Fr < 1,8$	$0,95 \sqrt{2 - \frac{3Fr^2}{Fr^2 + 2}}$
$1,8 < Fr$	$0,362 - 0,018(Fr - 1,8)$

Tableau 6.3 Coefficient  $\mu$  en fonction de Fr

### 6.7.3 Formule de Dominguez

Un façon assez simple d'aborder le problème du déversoir latéral consiste à supposer que l'énergie spécifique reste constante le long du déversoir. Dans ce cas on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \left( h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = \frac{dh}{dx} (1 - Fr^2) + \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (6.31)$$

Si bien qu'on obtient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Fr^2 - 1} \frac{Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} \quad (6.32)$$

L'équation (6.31) peut s'obtenir directement à partir de l'équation (6.29) en posant  $S_0 = S_f$  dans cette dernière. Comme le débit se réduit progressivement au fur et à mesure qu'il est déversé,  $dQ/dx$  est négatif.

On conclut par conséquent que lorsque le régime est fluvial,  $Fr^2 < 1$  et donc  $dh/dx > 0$ . La profondeur augmente de l'amont vers l'aval comme le montre la figure 6.13. Quand le régime est torrentiel,  $Fr^2 > 1$  et donc  $dh/dx < 0$ . La profondeur diminue de l'amont vers l'aval comme le montre la figure 6.14.

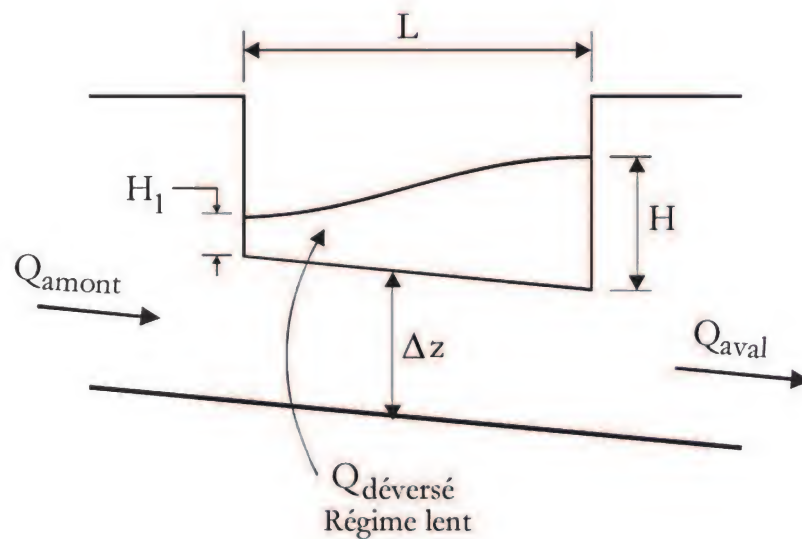


Fig. 6.13 Surface libre en écoulement fluvial

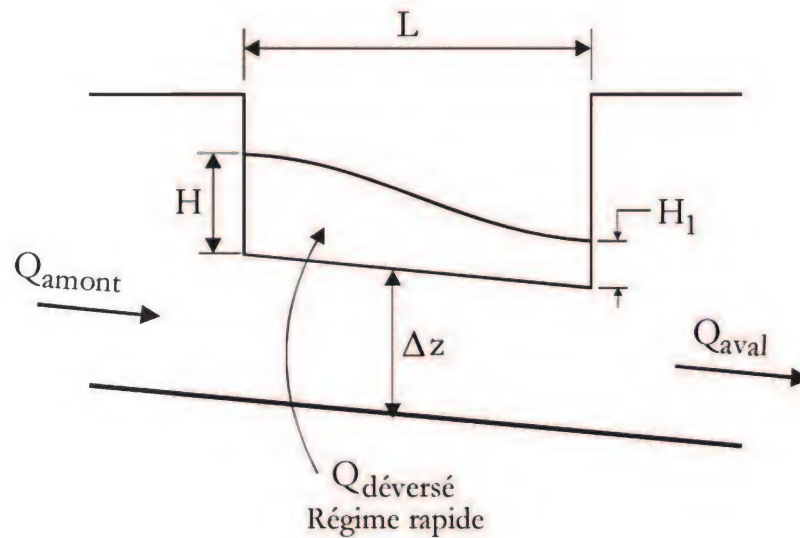


Fig. 6.14 Surface libre en écoulement torrentiel

Dans les deux cas, on utilise la formule proposée par Dominguez (1945) pour calculer le débit déversé :

$$Q = \phi_1 \phi_2 L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (6.33)$$

Ainsi, quand l'écoulement est torrentiel, la hauteur de charge  $H$  à prendre en considération est celle qui prévaut en amont du déversoir. Quand l'écoulement est fluvial, il faut utiliser la hauteur de charge en aval.

La valeur de  $\phi_1$  ne varie pas beaucoup avec les hauteurs  $H$  et  $H_1$  et possède une valeur moyenne de 0,36 pour un déversoir à paroi mince, 0,32 pour un déversoir à crête épaisse avec bord arrondi et 0,27 pour un déversoir à crête épaisse avec bord à arêtes vives.

Pour calculer  $\phi_2$ , nous avons développé les formules suivantes à partir des valeurs fournies dans divers ouvrages (Carlier, 1986 et Lencastre, 1999) :

$$\text{pour } 0 \leq \frac{H}{H_1} \leq 0,5 \quad \phi_2 = 0,4 + 0,5 \frac{H}{H_1} \quad (6.34)$$

$$\text{pour } 0,5 < \frac{H}{H_1} \leq 1 \quad \phi_2 = 0,3 + 0,7 \frac{H}{H_1} \quad (6.35)$$



$$\text{pour } 1 < \frac{H}{H_1} \leq 2 \quad \phi_2 = 0,3 + 0,7 \frac{H_1}{H} \quad (6.36)$$

$$\text{pour } 2 < \frac{H}{H_1} < \infty \quad \phi_2 = 0,4 + 0,5 \frac{H_1}{H} \quad (6.37)$$

## 6.8 Analyse des incertitudes de mesure

L'analyse des incertitudes de mesure consiste à déterminer l'effet d'une erreur dans la lecture de la hauteur  $h$  sur l'estimation du débit par les formules développées précédemment. On traite cette question séparément pour le déversoir rectangulaire et triangulaire.

### a) Déversoir rectangulaire

D'une manière générale, toutes les formules développées pour ce type de déversoir peuvent se mettre sous la forme  $Q = KH^{3/2}$ . En utilisant la dérivée logarithmique on obtient  $dQ/Q = (3/2)(dH/H)$ . D'après cette relation, il est clair qu'une erreur relative de 1% sur la mesure de  $h$  produit une erreur relative de 1,5% sur l'estimation du débit.

### b) Déversoir triangulaire

La formulation générale du débit déversé par un déversoir triangulaire en fonction de  $h$  est  $Q = KH^{5/2}$ . La dérivée logarithmique de cette relation est  $dQ/Q = (5/2)(dH/H)$ . Une erreur relative de 1% sur la mesure de la hauteur  $h$  se reflète par une erreur relative de 2,5% sur l'estimation du débit.

Le lecteur intéressé par plus de détails sur les méthodes de mesure en hydraulique est invité à consulter l'ouvrage de Krajewski *et al.* (2000).

## RÉSUMÉ

- 1- Le débit déversé par un orifice se calcule par la formule générale suivante:

$$Q = mA\sqrt{2gh}$$

où  $A$  est la section de l'orifice et  $h$  la hauteur d'eau mesurée à partir du centre de l'orifice,

$m \approx 0,6$  pour un orifice à paroi mince,

$m \approx 0,96$  pour un orifice à paroi moulée bien profilée,

$m \approx 0,82$  pour un ajustage sortant.

- 2- Le débit déversé par un déversoir frontal rectangulaire se calcule par la relation :

$$Q = \mu L \sqrt{2g} h^{3/2}$$

Pour un déversoir à seuil mince,  $\mu$  est approximativement égal à 0,415. La valeur de  $\mu$  peut être estimée par la formule de Bazin ou de Hégley.

- 3- Pour un déversoir triangulaire, le débit déversé peut être estimé par la relation :

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan(\alpha) \sqrt{2g} h^{5/2}$$

où  $\mu$  est approximativement égal à 0,58.

- 4- Pour un déversoir rectangulaire latéral, le débit déversé se calcule par la relation :

$$Q = \phi_1 \phi_2 L \sqrt{2g} h^{3/2}$$

$\phi_1 = 0,36$  pour un déversoir à paroi mince.

$\phi_2$  peut être estimé par les relations (6.39) et (6.40).

## EXERCICES

### Exercice 6.1

Un déversoir rectangulaire avec contraction latérale possède une largeur d'ouverture  $L = 3,0\text{m}$  et une hauteur de crête  $\Delta z = 1,0\text{m}$ . Ce déversoir a été placé dans un canal rectangulaire ayant une largeur de  $5,0\text{m}$ .

Quel est le débit d'écoulement correspondant à une hauteur de charge  $H = 0,30\text{m}$ ?

Il faut comparer le débit obtenu par la formule de Francis avec celui obtenu par la formule de Hégley.

### Exercice 6.2

Un déversoir triangulaire possède un angle d'ouverture de  $90^\circ$ .

Quelle est la hauteur de charge  $H$  nécessaire pour déverser un débit de  $60$  litres par seconde?

### Exercice 6.3

On utilise un déversoir rectangulaire à mince paroi de largeur  $L = 0,5\text{m}$  pour mesurer un débit  $Q = 0,15\text{m}^3/\text{s}$ . Si l'incertitude sur la mesure de la hauteur  $H$  est  $\Delta H = 1\text{cm}$ , quelle est l'erreur et l'incertitude sur la mesure du débit?

### Exercice 6.4

On utilise un déversoir à seuil épais de largeur  $L = 5,0\text{m}$  et de longueur  $W = 100,0\text{m}$  pour drainer l'eau d'un lac, tel que montré sur la figure 6.15.

Il faut déterminer le débit d'écoulement.

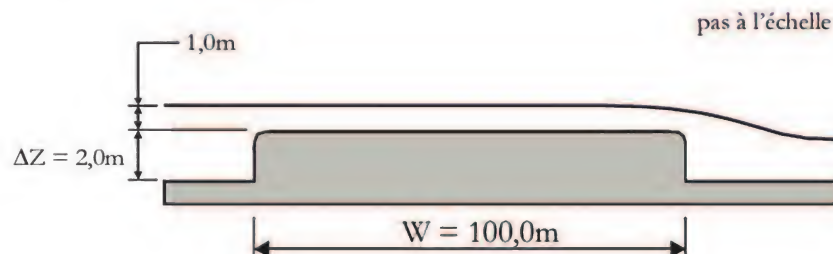


Fig. 6.15



## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 6

Bertrand-Krajewski, J.L., Laplace, D., Joannis, C. et Chebbo, G. (2000), *Mesures en hydrologie urbaine et assainissement*, Paris, Éditions ECT et DOC.

Bos, M.G. (1976), *Discharge Measurement Structures*, Delft, Publication No. 20, International Institution for Land Reclamation and Improvement.

Carlier, M. (1972), *Hydraulique générale et appliquée*, Paris, Eyrolles.

Chin, A.D. (2000), *Water-Resources Engineering*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice-Hall.

Chocat, B. (1997), *Encyclopédie de l'hydrologie et de l'assainissement*, Paris, Éditions TEC et DOC.

Chow, V.T. (1988), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Dominguez, J. (1945), «Déversoirs latéraux», *J. Hydraulica*.

Fortier, S. et Scobey, F.C. (1926). «Permissible Canal Velocities», *Transactions*, vol. 89, American Society of Civil Engineers, p. 940-956.

French, R. (1985), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Lencastre, A. (1999), *Hydraulique générale*, 2<sup>e</sup>éd., Paris, Eyrolles.

NR X 10-311 (1983), *Mesure du débit de l'eau dans les canaux découverts au moyen de déversoirs en mince paroi*, Paris, AFNOR, septembre 1983, 37 p.

Parshall, R.L. (1926), «The improved Venturi flume», *Transactions of the A.S.C.E.*, 89, p. 841-440

U.S. Army Corps of Engineers (1995), *Hydraulic Reference Manual*, Version 1.0, Davis (CA), Hydrologic Engineering Center.

USBR (1958), «Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators», *Engineering Monograph*, n° 25.

## SYMBOLES DU CHAPITRE 6

$A$	: section d'écoulement
$C_c$	: coefficient de correction
$C_d$	: coefficient de correction de débit
$C_F$	: coefficient de correction
$C_v$	: coefficient de correction de     vitesse
$d$	: diamètre d'orifice circulaire
$Fr$	: nombre de Froude
$g$	: accélération due à la gravité
$h$	: hauteur, profondeur
$h_c$	: hauteur critique
$h_f$	: perte de charge par frottement
$h_n$	: hauteur normale
$h_s$	: hauteur de seuil
$H$	: hauteur, charge hydraulique
$K$	: coefficient de déversoir
$L$	: largeur
$m$	: coefficient de correction de débit
$Q$	: débit volumique
$S_0$	: pente du fond d'un canal
$S_f$	: pente de la ligne d'énergie
$V$	: vitesse d'écoulement
$W$	: longueur de seuil épais
$x$	: abscisse, distance horizontale
$y$	: ordonnée, hauteur, profondeur
$y_c$	: profondeur critique
$z$	: cote, coordonnée
$Z$	: cote
$\alpha$	: angle
$\Delta$	: variation
$\mu$	: coefficient
$\phi$	: coefficient de calcul de débit





# Chapitre 7

## *Cycle hydrologique – précipitations, évaporation et infiltrations*

### Objectifs

- 1- Décrire et quantifier les différentes composantes du cycle hydrologique.
- 2- Se familiariser avec les instruments de mesure des précipitations et de l'évaporation.
- 3- Évaluer la lame de pluie représentative sur un bassin.
- 4- Quantifier les infiltrations dans le sol par différentes méthodes.
- 5- Estimer l'évaporation à partir d'un plan d'eau.

## 7.1 Introduction générale

L'*hydrologie* est la science qui étudie l'eau sous ses aspects quantitatif et qualitatif durant les différentes phases de son cycle dans la nature. L'hydrologue utilise des modèles mathématiques pour prédire les différents phénomènes hydrologiques dans le but de gérer les ressources hydriques d'une manière proactive et non réactive.

Ainsi l'hydrologue relie, par exemple, le débit à l'exutoire d'un bassin aux précipitations génératrices du ruissellement. Comme il existe un délai entre les deux phénomènes, l'hydrologue peut alerter les riverains afin de limiter les dégâts causés par les inondations. Cette marge de manœuvre peut être augmentée grâce au radar météorologique qui prédit les précipitations avant même qu'elles n'atteignent le sol.

L'hydrologue peut aussi utiliser ces prévisions et agir sur le système hydrique afin d'éviter ou du moins de diminuer l'ampleur des dégâts. Ainsi, il prendra la décision de vider un réservoir en prévision d'un volume de ruissellement qu'il aura prédit et qui pourrait occasionner des dégâts en aval.

Les enjeux ne sont pas uniquement de nature sociale mais aussi d'ordre économique. Ainsi, à l'opposé de la décision précédente, le gestionnaire maintiendra le réservoir le plus plein possible pour répondre à la demande énergétique s'il prédit une période sèche.

Ce problème se pose avec acuité dans la gestion des réservoirs annuels, à la fin de l'hiver, dans les régions nordiques. Ces réservoirs, qui ont un cycle de remplissage-vidange d'une année, doivent idéalement être complètement vides juste au début de la crue printanière. Mais si l'on vide ces réservoirs trop hâtivement à la fin de l'hiver et la crue printanière tarde à venir il y a risque de défaillance énergétique. À l'opposé, si l'on maintient le niveau du réservoir trop élevé pendant que la crue survient, on risque de produire des inondations et des déversements qui causent un manque à gagner.

Entre ces deux décisions conflictuelles, on voit se dessiner la notion de gestion du risque hydrologique dans laquelle la fiabilité des prévisions est primordiale.

Par ailleurs, les modèles mathématiques peuvent aussi être utilisés dans l'étape de conception pour calculer les dimensions économiques d'un ouvrage de stockage, d'évacuation ou de drainage.

## 7.2 Le cycle hydrologique

L'ensemble de tous les processus de transformation de l'eau sur la terre s'appelle cycle hydrologique dont les phases principales sont (figure 7.1) :

### 1- Évaporation

Elle se fait principalement au niveau des océans qui couvrent 70% de la surface terrestre et contiennent 97% des eaux disponibles. L'évaporation annuelle moyenne à partir des océans est estimée à 1400mm. Cependant, approximativement 90% de ce volume retombe directement sous forme de précipitations sur les océans. Mais l'évaporation se fait aussi directement à partir de l'atmosphère en temps de pluie, au niveau des plans d'eau, du sol humide et à travers la végétation (480mm/an). Dans ce dernier cas on l'appelle transpiration. On groupe sous le nom d'évapotranspiration l'ensemble des processus d'évaporation et de transpiration. L'évaporation directe à partir d'un manteau nival, sans passer par l'état liquide, est appelée sublimation.

### 2- Transport par les vents et les courants

Les nuages formés par évaporation peuvent être transportés par les vents et les courants. Ces mouvements d'air sont générés par le gradient de pression qui existe entre les centres de haute et basse pressions. L'existence de ces centres est directement reliée au gradient de température entre des endroits exposés différemment au soleil.

### 3- Précipitations

Sous certaines conditions atmosphériques, les nuages formés par évaporation se condensent et tombent sous l'effet de la gravité, donnant lieu à des précipitations. Celles-ci peuvent être solides ou liquides selon que la température ambiante est respectivement en-dessous ou au-dessus de zéro degré. Les précipitations sur les terres (800mm/an) proviennent à 40% de l'évaporation à partir des océans et à 60% à partir de l'évaporation au niveau des plans d'eau, de l'atmosphère et du sol.

### 4- Infiltration

Quand les précipitations sont liquides, une partie remplit les dépressions et s'infiltré dans le sol. Ces infiltrations rechargent le sol en humidité et alimentent les nappes souterraines.

### 5- Écoulement souterrain

Les nappes souterraines alimentent horizontalement les cours d'eau et les lacs durant les jours et les mois qui suivent les infiltrations verticales dans le sol. Cependant, selon la position relative du niveau de la nappe souterraine et du



cours d'eau avoisinant, il peut y avoir écoulement dans un sens ou dans l'autre.

#### 6- Ruissellement de surface

L'excédent des précipitations qui ne s'est pas infiltré ou évaporé ou n'a pas été intercepté par la végétation, va s'écouler selon la pente du terrain. C'est le ruissellement de surface qui alimente les rivières et les fleuves se déchargeant dans les mers et océans. On estime qu'annuellement seulement 320mm des 800mm tombant sur les terres retournent aux océans sous forme de ruissellement de surface. La balance (480mm/an) constitue le déficit d'écoulement.

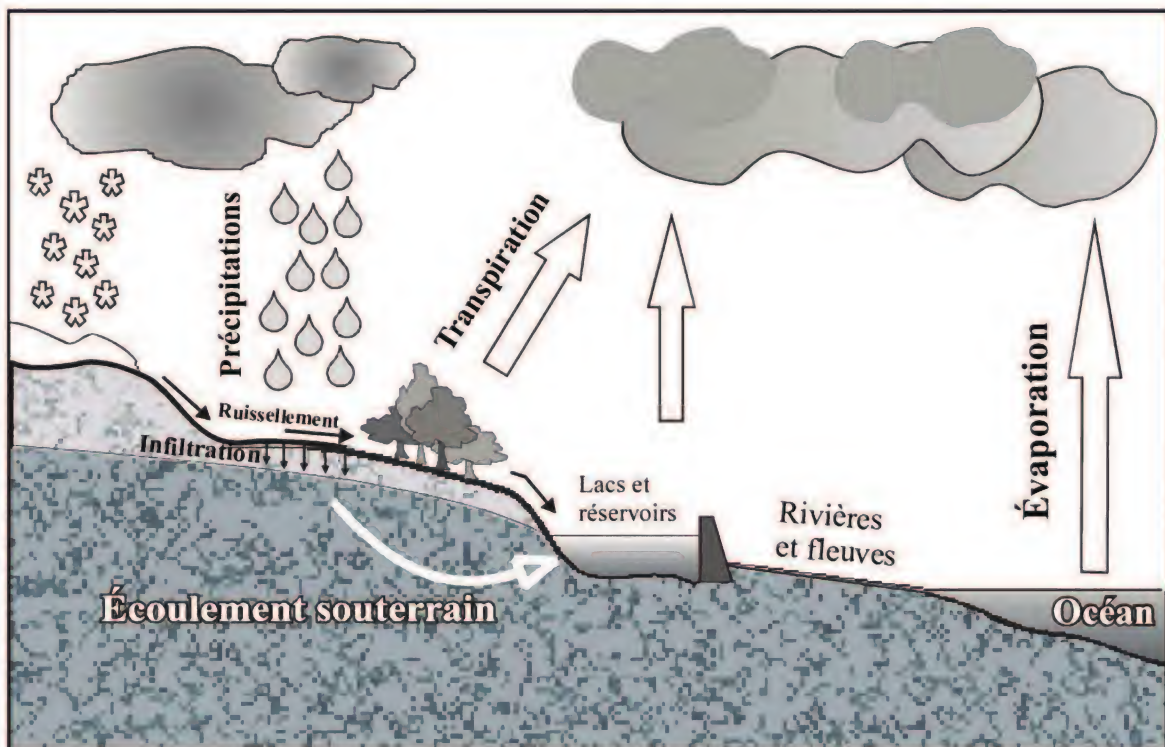


Fig.7.1 Cycle hydrologique

#### Remarques :

- 1- L'évaporation décroît de l'équateur vers les pôles. Ce taux de décroissance est sensiblement égal à celui de la température.
- 2- Sur un même parallèle, l'intensité de l'évaporation est pratiquement uniforme.
- 3- La quantité totale des précipitations sur un point est inversement proportionnelle à sa distance de l'océan.
- 4- Pour une même position géographique, les quantités totales des précipitations et de ruissellement dépendent de l'élévation moyenne du bassin versant.
- 5- Si l'on considère le volume total existant sur la terre, l'eau est une ressource renouvelable sans point critique. Ce qui signifie que le volume total disponible reste inchangé dans le temps peu importent les conditions d'utilisation. Quand on considère un volume restreint (nappe souterraine, lac...), l'eau est une ressource renouvelable avec point critique. Ceci signifie qu'au-delà d'une limite d'exploitation, le volume utilisé dépasse les apports naturels et au bout d'un certain temps la ressource risque d'être épuisée.

## 7.3 Hydrologie des bassins versants

### 7.3.1 Définition d'un bassin versant

Un *bassin versant* est un espace géographique tel que chaque goutte d'eau tombée, non évaporée ou absorbée par infiltration, est acheminée par gravité en un point commun appelé *embouchure* ou *exutoire* du bassin versant (figure 7.2).

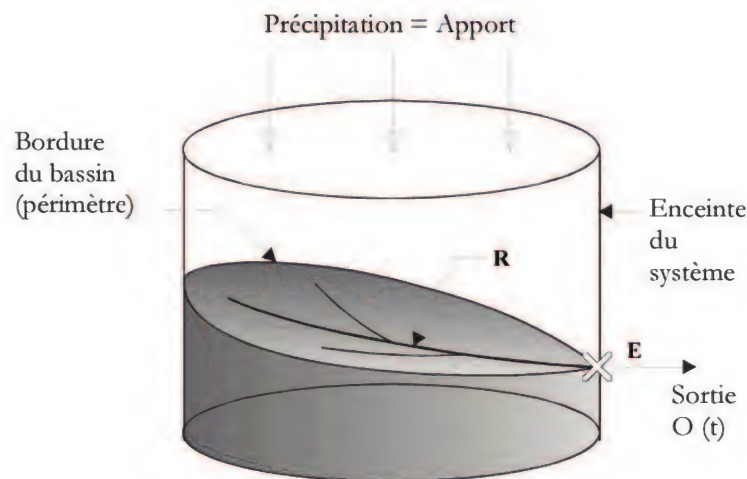


Fig. 7.2 Schématisation d'un bassin versant

Il découle de cette définition que les frontières d'un bassin versant sont les lignes de crête le séparant des bassins versants adjacents. La figure 7.3a illustre la subdivision d'une zone urbaine en six bassins versants séparés par la ligne de crête (30m). L'écoulement de l'eau se fait toujours perpendiculairement aux courbes de niveau (isohypses). La définition d'un bassin versant est intimement liée au point où l'on veut faire la conception ou la gestion des eaux. À titre d'exemple, la conception d'une conduite d'égout pluvial dans la zone ABCD (figure 7.3a), en tête d'un bassin urbain, peut nous amener à considérer un bassin versant ne comprenant qu'un pâté de maisons (figure 7.3b).

À l'autre extrême, quand on s'intéresse à la gestion des intercepteurs sur le territoire de la ville de Montréal, la subdivision des bassins est beaucoup plus grossière. Les eaux de ruissellement du bassin nord sont drainées vers la Rivière-des-Prairies alors que celles du bassin sud aboutissent au fleuve Saint-Laurent (figure 7.4). Les bassins nord et sud peuvent être subdivisés en sous-bassins, contribuant séparément à l'écoulement à un point de trop-plein au niveau de la jonction avec l'intercepteur.



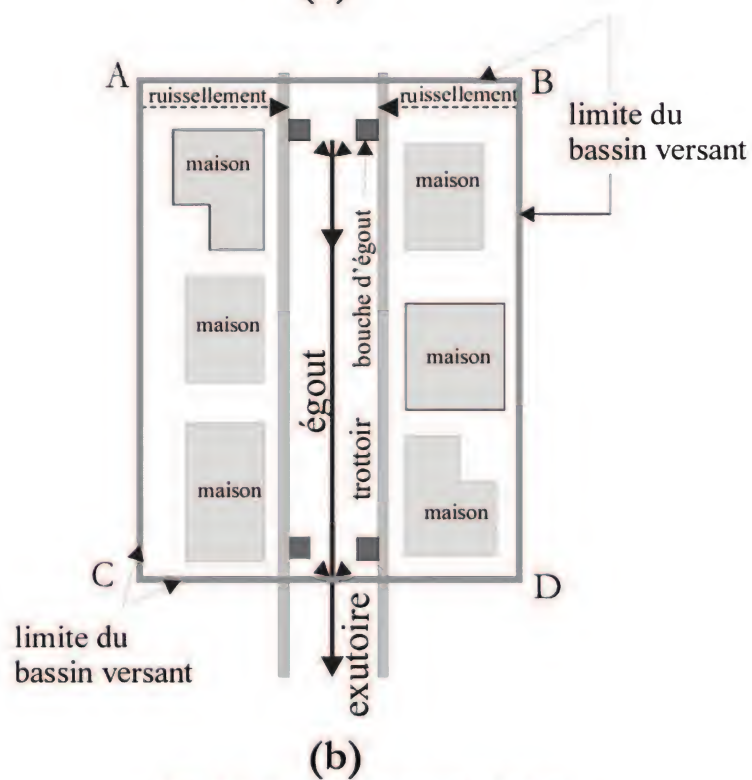
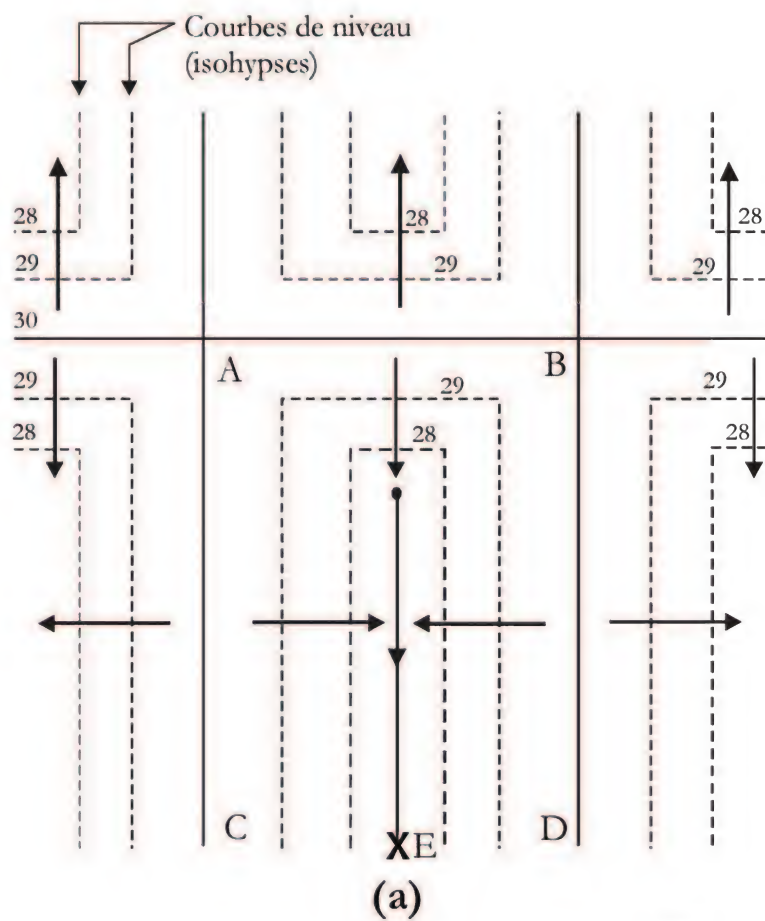


Fig.7.3 Bassins versants urbains



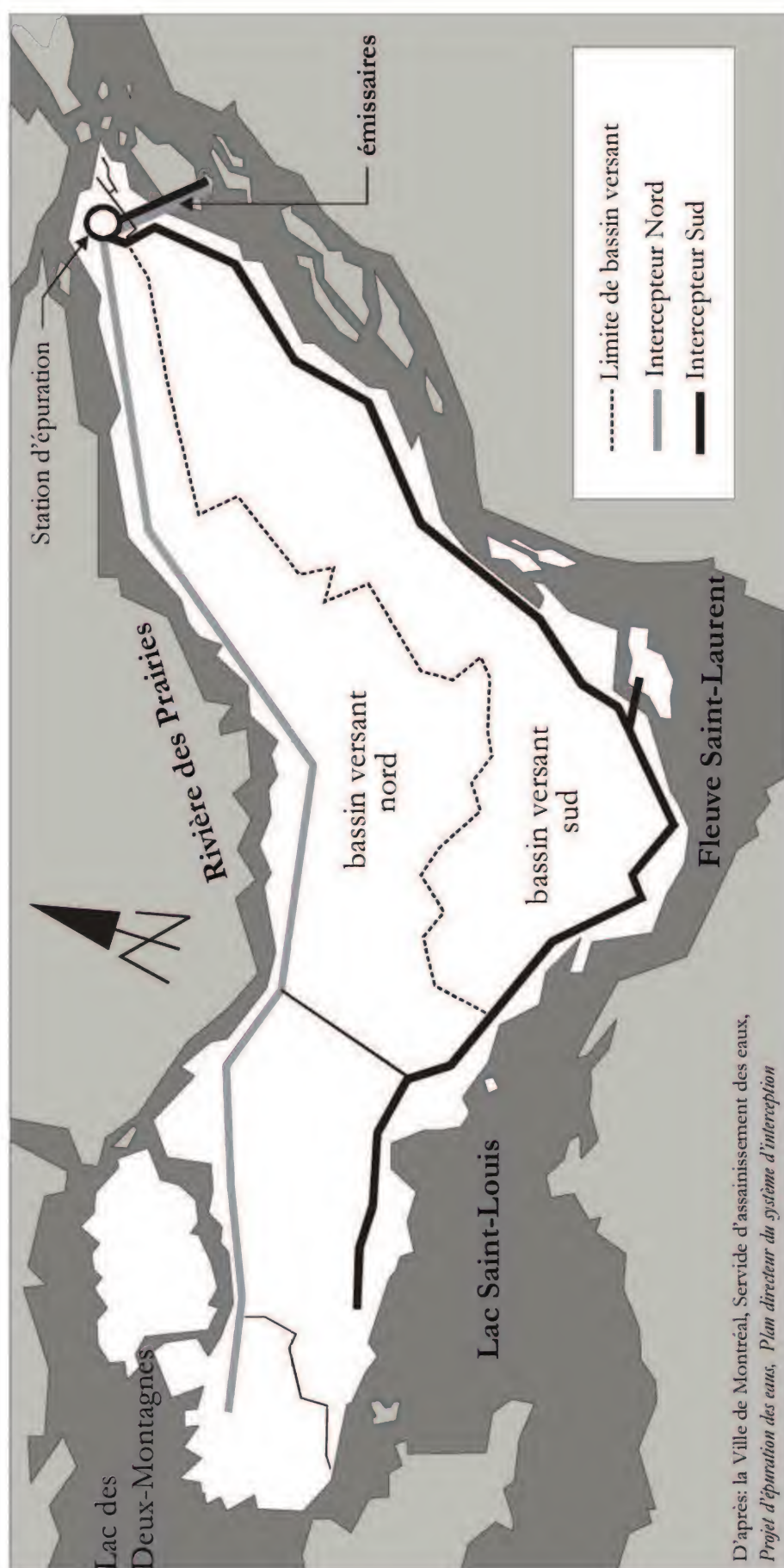


Fig. 7.4 Schéma des bassins nord et sud de la ville de Montréal

### 7.3.2 Précipitations sur un bassin versant

En hydrologie, on ne s'intéresse pas particulièrement à la connaissance des phénomènes engendrant la formation des précipitations. Ce type de connaissance est du domaine de la météorologie. Les précipitations constituent la donnée de base qui sert de point de départ pour le dimensionnement, la réhabilitation et la gestion en temps réel d'un système hydrique aussi bien en milieu urbain que rural.

#### 7.3.2.1 Classification

On peut classer les précipitations en trois types :

1- Précipitations de convection

Ces précipitations ont surtout lieu au cours de l'été. L'air humide au contact du sol qui est chauffé par les radiations solaires s'élève verticalement. Étant refroidi au cours d'une détente adiabatique, il se condense et donne lieu à des précipitations courtes mais intenses. Ces précipitations sont surtout fréquentes en régions équatoriales mais surviennent aussi en régions tempérées. Compte tenu de leur forte intensité et de leur courte durée, ces précipitations sont éprouvantes pour les réseaux d'assainissement.

2- Précipitations orographiques

Lorsque des masses d'air chaudes et humides provenant des océans rencontrent un sol montagneux froid, elles se condensent et donnent lieu à des précipitations orographiques.

3- Précipitations cycloniques

Quand deux fronts de masses d'air de températures et degrés d'humidité différents se rencontrent, on assiste à des précipitations cycloniques. La masse d'air la plus chaude étant poussée vers le haut, elle se refroidit au cours d'une détente adiabatique et se condense, donnant lieu à des précipitations généralement intenses et prolongées.

#### 7.3.2.2 Mesure des précipitations

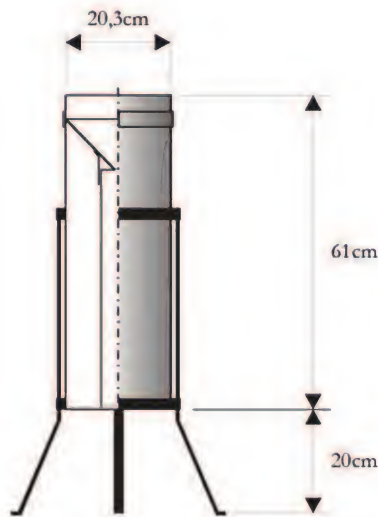
Il existe une grande variété d'appareils de mesure des précipitations qui peuvent être classés en pluviomètres et pluviographes.

Le *pluviomètre* fournit généralement la hauteur de pluie cumulative sur 24 heures. Mais cette durée peut être plus ou moins grande selon la fréquence de lecture. Cet appareil est généralement non enregistreur.



Le *pluviographe* est un appareil enregistreur qui fournit les intensités de pluie à des pas de temps variant entre 1 et 6 minutes.

L'appareil de mesure le plus ancien est le pluviomètre qui permet de déterminer la lame cumulative tombée entre deux lectures.



Le pluviomètre standard américain comporte un élément collecteur, un entonnoir et un récipient cylindrique (figure 7.5).

Il s'agit d'un instrument bon marché qui ne comporte aucune composante électrique ou mécanique pouvant faire défaut. On peut lire la lame cumulative tombée, directement sur l'appareil ou en transvidant l'eau du récipient dans un tube gradué.

Fig. 7.5 Pluviomètre standard américain (Weather-Bureau)

Cet appareil possède par ailleurs trois inconvénients :

- 1) L'erreur de mesure peut être non négligeable à cause des pertes par éclaboussement, évaporation et effet du vent.
- 2) Cet appareil ne fournit pas l'hyétogramme mais seulement la lame cumulative; les modèles hydrologiques utilisés actuellement nécessitent la connaissance de la variation de l'intensité de la pluie dans le temps; ceci est d'autant plus vrai pour les bassins urbains où le ruissellement ne dure que quelques minutes.
- 3) Cet appareil ne se prête pas à l'automatisation et ne permet ni la lecture ni l'enregistrement ni la transmission des mesures à distance; ceci pose un grand problème pour les régions éloignées et pour la gestion en temps réel.



Le pluviographe à augets basculeurs permet de remédier à ces lacunes (figure 7.6).

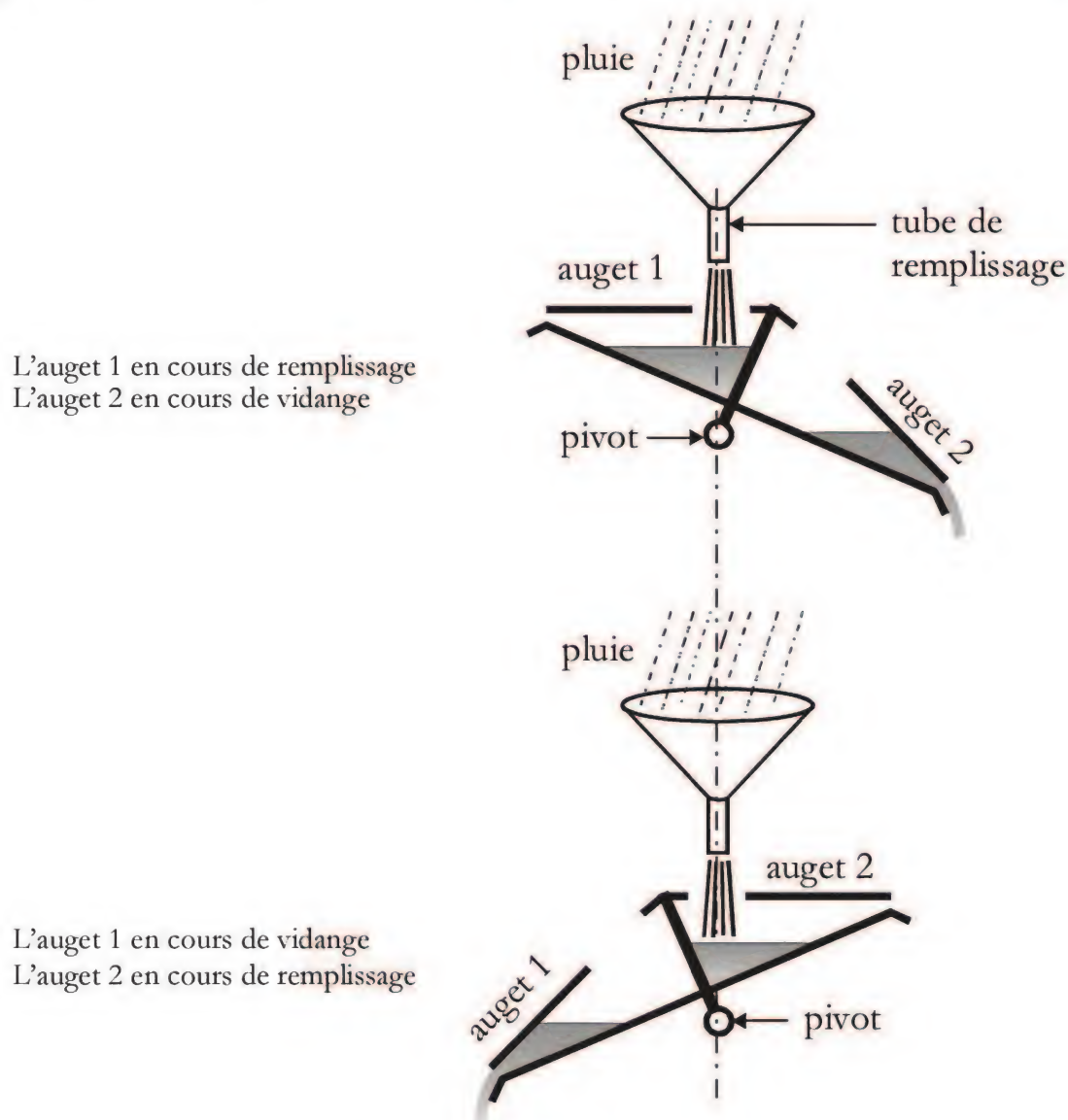


Fig. 7.6 Pluviographe à augets basculeurs

Cet appareil comprend deux compartiments qui se remplissent et se vident tour à tour sous l'effet du poids du volume des précipitations captées par l'entonnoir collecteur. Chaque basculement de l'appareil est comptabilisé en actionnant le contact d'un relais. Connaissant la hauteur d'eau qui provoque le basculement, on peut reconstituer la lame d'eau tombée en comptant le nombre de basculements dans une unité de temps qui peut être aussi petite que la minute. Le choix de la surface de réception du cône (400 à 2000cm<sup>2</sup>) et du poids de l'eau qui fait basculer l'auget (4 à 20g) permet d'établir la relation entre la lame tombée et le basculement des augets. D'une manière générale, une résolution de 0,2mm est suffisante pour décrire précisément les hyétogrammes.

Cet appareil qui est relativement précis permet l'enregistrement de l'hyétogramme et la transmission des données à distance. Le pluviographe à augets basculeurs qui est très populaire pour les bassins urbains ne permet qu'une mesure ponctuelle des précipitations.

Le radar météorologique permet de couvrir une grande surface de bassin avec une résolution spatiale de l'ordre du  $\text{km}^2$  et temporelle de l'ordre de 5 minutes. De plus, il a l'avantage de mesurer tous les types de précipitations et de permettre la prévision alors que les nuages sont encore à une certaine distance du bassin concerné.

Le principe du radar est basé sur la réflexion électromagnétique des nuages. Quand les ondes émises par le radar atteignent des gouttelettes d'eau ou des cristaux de glace, elles sont réfléchies et captées. Il reste à transformer la réflectivité  $Z$  mesurée par le radar en intensité de précipitations au sol. La relation la plus utilisée pour opérer cette transformation est celle de Marshall-Palmer (Chocat, 1997) :

$$Z = 200 \cdot P^{1.6} \quad (7.1)$$

où  $P$  est l'intensité des précipitations en  $\text{mm/h}$ ,  
 $Z$  est le taux effectif de réflexion mesuré par le radar en  $\text{mm}^6/\text{m}^3$ .

L'exploration en volume de l'atmosphère est accomplie grâce à deux mouvements de base : 1) la rotation de l'antenne permet de mesurer l'étendue spatiale des précipitations, 2) l'inclinaison verticale permet de mesurer la hauteur des précipitations.

Le radar est sensible aux bruits et aux mouvements atmosphériques qui agissent sur la vitesse de chute de la pluie. Les valeurs empiriques présentées dans la relation (7.1) se voient modifiées en fonction du contexte.

### 7.3.2.3 Évaluation des précipitations sur un bassin versant

En général, la répartition géographique de l'intensité des précipitations n'est pas homogène. C'est pour cette raison qu'on installe un réseau de pluviomètres assez dense pour mesurer les précipitations avec le maximum de précision. Le problème qui se pose maintenant est l'évaluation des précipitations représentatives, connaissant les mesures fournies par des pluviomètres installés sur le bassin.

### - Méthode de la moyenne arithmétique

C'est la méthode la plus simple mais non la plus précise. Elle consiste à faire la moyenne arithmétique  $P$  des valeurs enregistrées à tous les pluviomètres :

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \quad (7.2)$$

où  $n$  est le nombre de stations pluviométriques,  
 $P_i$  est la hauteur des précipitations enregistrée à la station «  $i$  ».

Cette méthode peut être utilisée soit dans les bassins où les variations orographiques sont peu importantes soit dans les bassins densément instrumentés.

Pour obtenir une moyenne plus représentative, on utilise la méthode des isohyètes ou la méthode des polygones de Thiessen.

### - Méthode des isohyètes

On définit une *isohyète* comme étant une ligne virtuelle reliant les points d'une région le long desquels les précipitations sont identiques (figure 7.7).

On trace un réseau d'isohyètes à l'aide des enregistrements disponibles. La hauteur moyenne des précipitations sur le bassin est alors :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^k A_i P_i}{A} \quad (7.3)$$

où  $A_i$  est la superficie comprise entre les isohyètes  $i$  et  $i+1$ ,  
 $A$  est la superficie totale du bassin,  
 $k$  est le nombre d'intervalles.



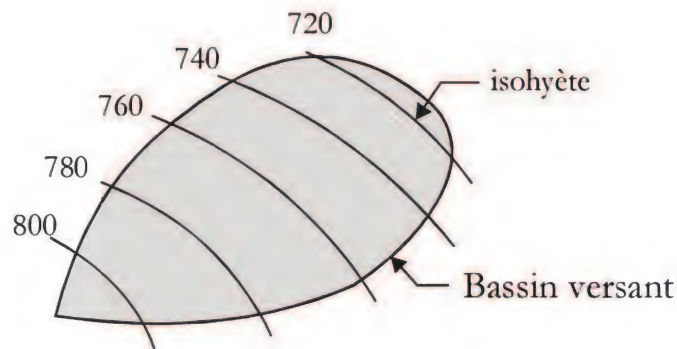


Fig. 7.7 Réseau d'isohyètes sur un bassin versant

La valeur de  $P_i$  est obtenue par :

$$P_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

où  $h_i$  est la hauteur des précipitations de l'isohyète « i »

Cette méthode possède l'avantage de prendre en considération la distribution géographique des stations. Malheureusement, la détermination des isohyètes sur la carte du bassin s'avère un problème à cause du nombre limité de stations pluviométriques généralement disponibles.

#### - Méthode de Thiessen

Cette méthode est basée sur le principe que l'intensité de la pluie en un point donné du bassin est mieux représentée par la station météorologique la plus proche. Dans cette méthode, on commence par relier chaque station aux stations directement avoisinantes par des segments de droite (figure 7.8). On coupe ensuite chacun des côtés des triangles ainsi formés par la médiatrice. Chaque station a un facteur de pondération proportionnel à la superficie délimitée par les médiatrices directement situées dans son voisinage.

La hauteur moyenne des précipitations est obtenue par :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^k A_i P_i}{A} \quad (7.4)$$

où  $k$  est le nombre de stations,  
 $A_i$  est la superficie du polygone « i »,  
 $P_i$  est la hauteur de précipitation enregistrée à la station « i »,  
 $A$  est la superficie totale du bassin

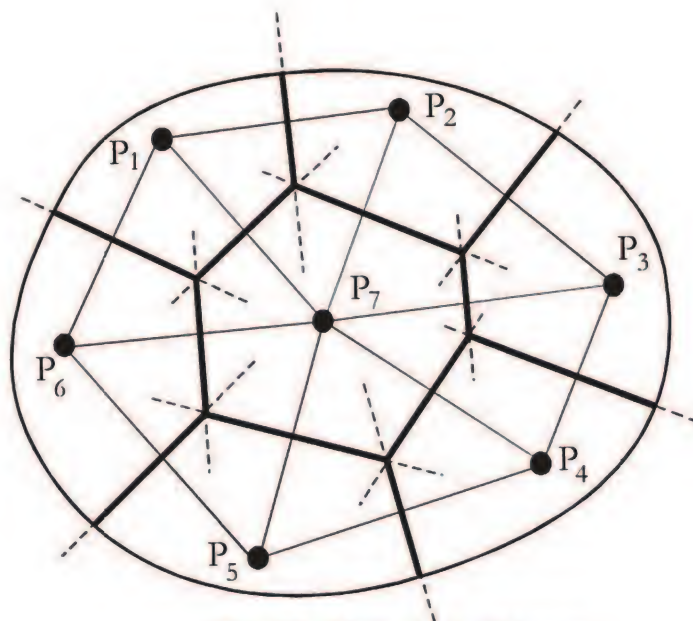


Fig. 7.8 Méthode de Thiessen

Cette méthode géométrique, qui est basée sur un principe de bon sens, semble donner le plus de satisfaction aux hydrologues. Elle est ainsi la plus utilisée.

### 7.3.3 Notion d'infiltration

Tel que défini au paragraphe 7.2, on appelle *infiltration* la partie des précipitations qui est absorbée par le sol et dirigée vers les couches inférieures. En pratique, avant que le ruissellement ne commence, il faut que les dépressions de surface soient remplies.

#### 7.3.3.1 Les pertes par dépression

Au début d'une averse, une certaine lame de pluie est nécessaire pour combler les dépressions qui existent sur les surfaces perméables et imperméables. Cette lame varie de 0,2 à 3mm pour les surfaces imperméables et de 3 à 15mm pour les surfaces perméables. En fait, cette perte par dépression peut être reliée à la pente du bassin par la relation (Chocat, 1997) :

$$\begin{aligned} d_p &= a + b(3 - S) & \text{si } S < 3\% \\ d_p &= a & \text{si } S > 3\% \end{aligned}$$

où  $d_p$  représente les pertes par dépression  
 $S$  est la pente moyenne du bassin, en %

Pour les surfaces perméables	$a = 2\text{mm}$	$b = 4\text{mm}$
Pour les surfaces imperméables	$a = 0,5\text{mm}$	$b = 1\text{mm}$



### 7.3.3.2 Méthode de l'indice d'infiltration

Le phénomène d'infiltration est complexe. Il est difficile de prédire d'une manière précise la quantité d'eau qui s'infiltre durant et après une averse. Cette quantité dépend de l'humidité du sol, de l'épaisseur de la couche saturée, de la compacité du sol, de la couverture végétale, du gel, de la quantité d'air dans le sol, de la pente de la surface...

Une des méthodes les plus simples est celle de l'indice d'infiltration  $\phi$  (figure 7.9).

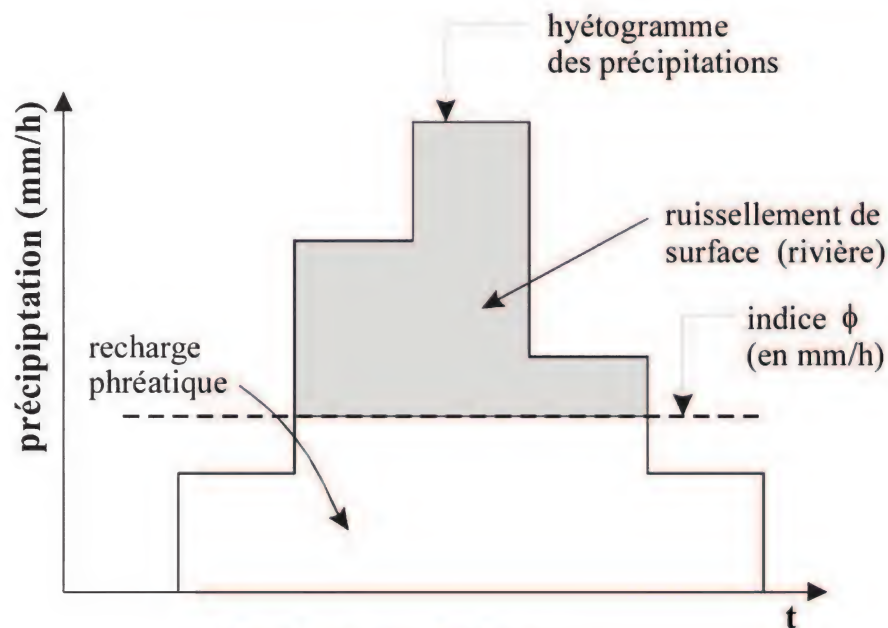


Fig. 7.9 Indice d'infiltration

L'indice  $\phi$  représente l'intensité moyenne au-dessus de laquelle tout excédent des précipitations se retrouve sous forme d'écoulement (figure 7.9). Mathématiquement, l'indice d'infiltration  $\phi$  se calcule par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N (i_i - \phi) \Delta t = \text{ruissellement de surface} \quad (7.5)$$

où  $i_i$  est l'intensité de la pluie en mm/h au temps  $i$ ,  
 $\Delta t$  est le pas de temps en heures.



### Application 7.1

Le tableau suivant fournit l'hyétogramme de pluie tombée sur un bassin versant :

période de 30 minutes	1	2	3	4	5
intensité $i$ (mm/h)	20	40	60	50	30

Le ruissellement net recueilli à l'exutoire du bassin à la suite de cette pluie a été mesuré :  $R = 40$  mm. Il faut estimer l'indice d'infiltration  $\phi$  pour ce bassin.

Supposons  $\phi \leq 20$  mm/h.

L'équation de calcul de  $\phi$  se présente sous la forme :

$$\frac{(20 - \phi) + (40 - \phi) + (60 - \phi) + (50 - \phi) + (30 - \phi)}{2} = 40 \quad (1)$$

soit  $\phi = 24$  mm/h.

Cette valeur de  $\phi$  est incompatible avec l'hypothèse de départ et génère une valeur négative dans le premier terme du membre gauche de l'équation (1).

On suppose maintenant  $\phi \leq 30$  mm/h. On réécrit l'équation (7.5) sous la forme suivante en éliminant l'intensité 20 mm/h :

$$\frac{(40 - \phi) + (60 - \phi) + (50 - \phi) + (30 - \phi)}{2} = 40$$

soit  $\phi = 25$  mm/h, en accord avec l'hypothèse de départ.

Cette méthode, quoique simple et utilisée dans la pratique, ne tient pas compte de la réalité hydrologique. En effet, elle suppose que le taux d'infiltration est constant durant une averse donnée. On sait cependant que si le sol est sec au début d'une averse, l'infiltration initiale est très importante et décroît au fur et à mesure que le sol devient saturé. C'est cette lacune que comble la méthode de Horton.

### 7.3.3.3 Méthode de Horton

La formule de Horton (1940) exprime l'intensité d'infiltration par (figure 7.10):

$$f(t) = f_{\infty} + (f_0 - f_{\infty})e^{-kt} \quad (7.6)$$

où  $f_0$  est l'infiltration maximum au temps  $t = 0$ ,  
 $f_{\infty}$  est l'infiltration asymptotique quand  $t$  devient grand,  
 $t$  est le temps écoulé depuis le début des précipitations,  
 $k$  est un paramètre en unités inverses du temps.

Les valeurs de l'intensité de l'infiltration s'expriment généralement en millimètres d'eau par heure ou pouces d'eau par heure.

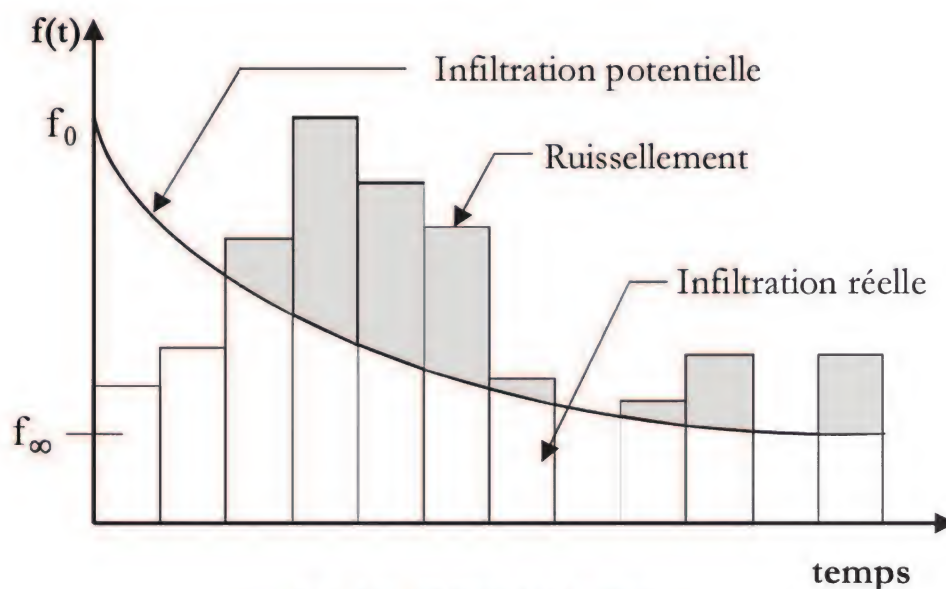


Fig. 7.10 Méthode de Horton

Par l'intégration de l'équation (7.6), on obtient l'infiltration cumulative (en millimètres d'eau) :

$$F(t) = f_{\infty} t + \frac{(f_0 - f_{\infty})}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (7.7)$$

Le tableau 7.1 donne les paramètres de l'équation de Horton en fonction du type de sol.

Catégorie de sol	A	B	C	D
$f_0$ (mm/h)	250	200	125	75
$f_\infty$ (mm/h)	25	12	6	2,5
$k$ (1/h)	2 à 5	2 à 5	2 à 5	2 à 5

A : faible possibilité de ruissellement (sable et gravier bien drainés)

B : taux d'infiltration moyen (texture moyennement fine à moyennement grosse : sable)

C : faible taux d'infiltration (texture assez fine, sols contenant de l'argile)

D : forte possibilité de ruissellement (argiles, nappes constamment hautes)

**Tableau 7.1 Paramètres d'infiltration de Horton**

### *Application 7.2*

Le sol d'un bassin possède les caractéristiques suivantes :

$$f_0 = 74 \text{ mm/h}$$

$$f_\infty = 15 \text{ mm/h}$$

$$K = 2 \text{ h}^{-1}$$

Quelle est l'infiltration cumulative potentielle dans ce bassin sur une durée de 5 heures ?

$$F = f_\infty t + \left( \frac{f_0 - f_\infty}{K} \right) (1 - e^{-Kt})$$

$$F = 15 \cdot 5 + \left( \frac{75 - 15}{2} \right) (1 - e^{-2 \cdot 5}) = 105 \text{ mm}$$

Il est possible de tenir compte des conditions initiales d'humidité du sol en définissant de façon convenable le taux d'infiltration initial  $f_0$ . En effet, lorsque le sol est humide ou la nappe phréatique est haute, les valeurs fournies dans le tableau 7.1 peuvent être réduites de plus de 50%. À l'inverse, en présence de végétation dense, ces valeurs peuvent être majorées en conséquence. Chocat (1997) propose de choisir  $f_0$  en fonction de  $f_\infty$  en tenant compte de la pluviosité antécédente. Si le sol est saturé en humidité au début de l'écoulement, on peut considérer que  $f_0$  est égal à  $f_\infty$ . Pour un sol sec, on peut utiliser  $f_0 = 4 f_\infty$  en l'absence de données.



Pour les bassins jaugés où des hyétogrammes et des hydrogrammes sont disponibles, on peut estimer  $f_0$  par calcul. Si l'on peut réduire toutes les pertes dues aux infiltrations, la lame cumulative  $F$  peut être considérée égale à la différence entre la lame de pluie brute  $P$  et la lame de ruissellement  $R$  ( $F = P - R$ ). La lame nette de ruissellement peut être calculée par la relation :

$$R = \frac{\text{volume de ruissellement}}{\text{superficie du bassin}} \quad (7.8)$$

L'équation (7.7) permet d'écrire :

$$f_0 = f_{\infty} + K \left( \frac{F - f_{\infty} t}{1 - e^{-Kt}} \right) \quad (7.9)$$

Il est important de souligner qu'à un instant  $t$  donné, l'intensité de l'infiltration dans le sol ne peut pas dépasser l'intensité des précipitations. C'est pour cette raison que l'on fait la distinction entre l'infiltration réelle et l'infiltration potentielle en écrivant :

$$f(t)_{\text{réelle}} = \text{minimum} [ f(t)_{\text{potentielle}}, i(t) ] \quad (7.10)$$

où  $i(t)$  est l'infiltration en fonction du temps  $t$

Une méthode plus juste pour tenir compte du fait que l'infiltration potentielle est supérieure à la pluie en début de l'orage consiste à décaler la courbe d'infiltration dans le temps comme le montre la figure 7.11. De cette manière, le ruissellement ne commence que lorsque le volume d'eau qui s'est infiltré devient égal au volume d'eau des précipitations.

$$\int_0^{t_0} i(t) dt = \int_0^{t_1 - t_0} f(t) dt \quad (7.11)$$

et

$$i(t_1) = f(t_1 - t_0) \quad (7.12)$$

Le décalage montré sur la figure 7.11 est tel que les volumes initiaux situés au-dessus et en-dessous de l'hyétogramme sont égaux.

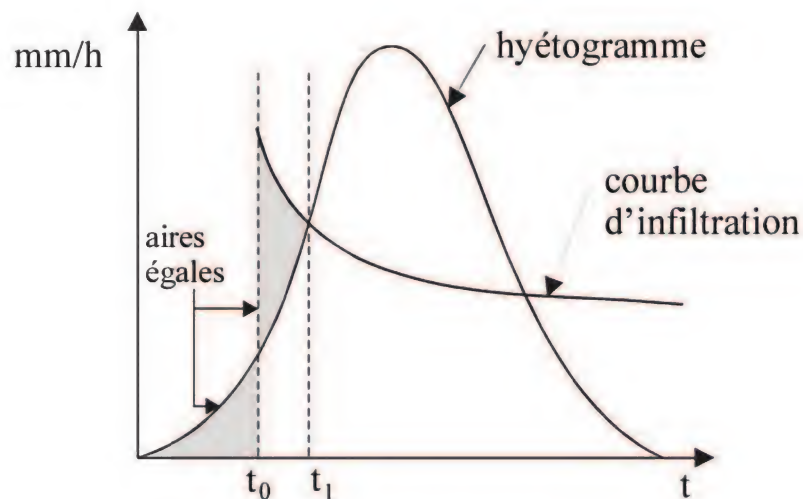


Fig. 7.11 Décalage de la courbe théorique d'infiltration

Le lecteur intéressé à connaître davantage sur les méthodes d'estimation de l'infiltration peut consulter l'ouvrage spécialisé de Smith (2002) qui traite exclusivement du sujet.

### 7.3.4 Notion d'évaporation

#### 7.3.4.1 Définition

La vaporisation (évaporation à la surface de l'eau) est le phénomène par lequel le liquide se transforme en vapeur. La transformation en vapeur d'un solide tel que la neige ou la glace, sans passer par l'état liquide, s'appelle sublimation.

#### 7.3.4.2 Description et quantification du phénomène

L'évaporation est directement contrôlée par l'énergie disponible sur la surface de contact (température) et par la facilité de mouvement de la vapeur dans l'atmosphère (vent).

Un volume d'air, en contact avec une surface solide ou liquide, ne peut contenir qu'une quantité limitée de vapeur pour une température et une pression données de l'air. Tant que la pression de vapeur à la surface du plan d'eau est inférieure à la pression de saturation, il y a de l'évaporation. Quand la pression de vapeur de saturation est atteinte, de la vapeur est ajoutée, elle se condense et retourne à la surface du liquide. On comprend donc qu'au moment de la saturation, il y a autant de molécules qui quittent la surface de l'eau pour s'évaporer que de molécules qui se condensent pour retourner à la surface de l'eau. On exprime

que l'évaporation est directement proportionnelle à la différence entre la pression de vapeur de saturation et la pression de vapeur réelle à la surface du liquide par :

$$E = C(e_w - e_a) \quad (7.13)$$

où C est un paramètre,  
E est l'évaporation journalière en millimètres quand  $C = 3,66$ ,  
mensuelle en millimètres quand  $C = 110$ ,  
 $e_w$  est la pression de vapeur de saturation (en kilopascals)  
correspondant à la température moyenne journalière ou mensuelle  
à la surface de l'eau (voir tableau 7.2),  
 $e_a$  est la pression moyenne journalière ou mensuelle de vapeur à  
la température de l'eau (en kilopascals).

La présence du facteur vent modifie sensiblement le phénomène d'évaporation en facilitant la diffusion de la vapeur dans l'atmosphère. Pour tenir compte du facteur vent qui fait augmenter l'évaporation, on utilise la formule de Meyer (1944) :

$$E = C(e_w - e_a)(1 + 0,062 \cdot V) \quad (7.14)$$

où V est la vitesse du vent à 7 mètres au-dessus de la surface de l'eau (km/h).

La pression de la vapeur de saturation  $e_w$  en kPa est fournie au tableau 7.2. Elle peut aussi être calculée à partir de la température  $t$  en degrés Celsius en utilisant la relation :

$$e_w = 0,6118e^{17,27t/(237,3+t)} \quad (7.15)$$

Par ailleurs, la pression de vapeur  $e_a$  peut être calculée à partir de l'humidité relative qui est définie par :

$$\text{humidité relative} = \frac{\text{pression de vapeur pour la température de l'air}}{\text{pression de vapeur à la saturation pour la température de l'air}} = \frac{e_a}{e_w}$$



Température (degrés C)	Pression de vapeur à la saturation (kPa)	Température (degrés C)	Pression de vapeur à la saturation (kPa)
-35	0,030	0	0,611
-30	0,050	5	0,873
-25	0,080	10	1,228
-20	0,125	15	1,704
-15	0,184	20	2,339
-10	0,288	25	3,169
-5	0,425	30	4,244

Tableau 7.2 Température de l'air et pression de vapeur à la saturation

Comme pour la mesure de la pluie, l'évaporation peut être mesurée directement à l'aide d'un bac d'évaporation standard circulaire en acier galvanisé de diamètre  $D = 1,21\text{m}$  et de hauteur  $h = 0,255\text{m}$  (figure 7.12). Cependant, l'évaporation à partir de ce bac est supérieure à l'évaporation à partir d'un plan d'eau étendu. Afin de ne pas surestimer l'évaporation, l'utilisation de paramètres de correction est nécessaire (Wanielista *et al.*, 1997).

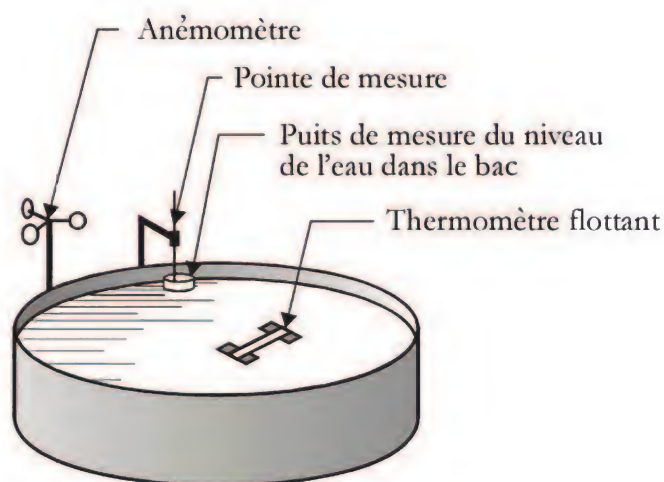


Fig. 7.12 Bac d'évaporation du Weather Bureau (1955)

Quand l'évaporation est estimée à l'échelle de l'année, le coefficient de correction à appliquer à la mesure du bac pour évaluer l'évaporation à partir du plan d'eau varie entre 0,65 et 0,82 (Kohler *et al.*, 1955). Doorenbos et Pruitt (1977) ont produit un tableau récapitulatif du coefficient de correction nécessaire dans chaque configuration.

*Remarque :*

En pratique, l'évaporation est calculée principalement pour une grande surface d'eau telle un lac, sur une grande période s'étalant sur des semaines, voire des mois. Durant une période de crue ponctuelle au niveau du bassin versant, l'évaporation est soit négligée soit fixée à un taux arbitraire variant entre 1 et 10mm/j.

### ***Application 7.3***

On veut estimer l'évaporation journalière à partir de la surface d'un lac situé dans la région de Montréal. La température moyenne de l'air est  $t_a = 30^\circ\text{C}$ . La température moyenne de l'eau est  $t_e = 15^\circ\text{C}$ . La vitesse du vent a été mesurée :  $V = 20\text{km/h}$ . L'humidité relative de l'air a été mesurée à l'aide d'un psychromètre : 20%. Il faut calculer l'évaporation journalière à partir de la surface du lac.

D'après le tableau 7.2 :

$$e_w(t_e = 15^\circ\text{C}) = 1,704\text{kPa}$$

$$e_w(t_a = 30^\circ\text{C}) = 4,244\text{kPa}$$

$$\text{humidité} = 0,2 = e_a(t_a = 30^\circ\text{C}) / e_w(t_a = 30^\circ\text{C})$$

$$\text{Donc } e_a(t_a = 30^\circ\text{C}) = 0,2(4,244) = 0,8488\text{kPa}$$

$$E = 3,66(1,704 - 0,8488)(1 + 0,062 \cdot 20) = 7\text{mm/j}$$

## RÉSUMÉ

- 1- D'une manière générale, les précipitations représentatives sur un bassin versant peuvent être estimées à partir de la relation suivante :

$$P = \frac{1}{n} \frac{\sum A_i P_i}{A}$$

où  $n$  est le nombre de stations pluviométriques.

Dans la méthode de la moyenne arithmétique, on a  $A_i = A = 1$ .

Dans la méthode des isohyètes,  $P_i = (h_i + h_{i+1})/2$ ;  $A_i$  est la superficie comprise entre les isohyètes  $i$  et  $i+1$  et  $A$  est la superficie du bassin.

Dans la méthode des polygones de Thiessen,  $A_i$  est la superficie délimitée par les médiatrices directement situées dans le voisinage de station  $i$ .

- 2- L'indice d'infiltration  $\phi$  se calcule par la relation

$$\text{ruissellement de surface} = \sum_{j=1}^N (i_j - \phi) \Delta t$$

où les  $i_j$  sont les intensités de pluie en mm/h,

$\Delta t$  est le pas de temps en heures.

- 3- La formule de Horton exprime la variation de l'intensité d'infiltration en fonction du temps :

$$f(t) = f_{\infty} + (f_0 - f_{\infty}) e^{-Kt}$$

et la lame cumulative d'infiltration par la relation :

$$F(t) = f_{\infty} t + \frac{(f_0 - f_{\infty})}{K} (1 - e^{-Kt})$$

- 4- La formule de Meyer permet d'estimer l'évaporation à partir de la surface d'un plan d'eau :

$$E = C(e_w - e_a)(1 + 0,062V)$$



## EXERCICES

### Exercice 7.1

Un bassin de drainage a la forme d'un carré ayant des côtés de deux unités de longueur. Les pluviomètres installés sur trois des coins du bassin ont enregistré 50mm, 20mm et 10mm de pluie (en lisant dans le sens des aiguilles d'une montre autour du carré). Il faut déterminer la moyenne des précipitations sur le bassin par la méthode des polygones de Thiessen et comparer avec la moyenne arithmétique.

### Exercice 7.2

Un bassin versant a une superficie de 1100km<sup>2</sup>. Un réseau de stations pluviométriques a permis de tracer la carte de l'isohyète suivante au cours d'un orage :

Intervalle des isohyètes (mm)	Superficie (km <sup>2</sup> )
40 à 60	600
20 à 40	300
0 à 20	200

Il faut déterminer la valeur représentative des précipitations à l'intérieur de ce bassin à l'aide de la méthode des isohyètes.

### Exercice 7.3

Une pluie ayant une intensité de 40mm/h est tombée sur un bassin durant deux heures.

Il s'agit de trouver la hauteur d'averse nette ou excédentaire en utilisant la formule de Horton pour l'infiltration.

Les paramètres de la formule de Horton sont les suivants:

Taux initial d'infiltration  $f_0 = 40\text{mm/h}$

Taux asymptotique d'infiltration  $f_\infty = 25\text{mm/h}$

$K = 3,0\text{h}^{-1}$

### Exercice 7.4

Lors d'un orage, on a enregistré l'hyétogramme suivant :

Heure	12h00	12h30	13h00	13h30	14h00
I (mm/h)	25	50	75	50	20

Le ruissellement de surface mesuré à l'exutoire du bassin a été de 30mm.

Il faut trouver l'indice d'infiltration  $\phi$  pour le bassin.

### Exercice 7.5

Il faut déterminer l'évaporation journalière d'un lac à partir des données suivantes :

Température de l'eau	:	20°C
Température de l'air	:	30°C
Vitesse du vent	:	30 km/h
Humidité relative	:	30%

## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 7

Chocat, B. (1997), *Encyclopédie de l'hydrologie et de l'assainissement*, Paris, Lavoisier TEC & DOC.

Communauté urbaine de Montréal, Projet d'épuration des eaux – Plan directeur du système d'interception

Doorenbos, J. et Pruitt, W.O. (1977), *Crop Water Requirements*, Rome, Irrigation and Drainage paper, 24, UN Food and Agriculture Organization.

Kidd, C.H.R. (1978), «Rainfall-Runoff Processes over Urban Surfaces», *Proceedings of the International Workshop*, Oxon, Institute of Hydrology, Walingford.

Kohler, M.A., Nordenson, T.J. et Fox, W.E. (1950, *Evaporation from Pans and Lakes*, Research Paper No. 38, Washington, D.C., U.S. Weather Bureau.

Meyer, A.F. (1944), *Evaporation from Lakes and Reservoirs*, St. Paul, Minnesota Resources Commission, juin 1944.

Rawls, J.W., Ahwja, R.L., Brakensiek, L.D. et Shirmohammad, A. (1992), *Infiltration and Soil Water Movement*, Handbook of Hydrology, p. 5.1-5.51.

Sempere Torres, D., Porra, J.M. et Creutis, J.D. (1994), «A general formulation for rain drop size distribution», *J. Appl. Meteor.*, vol. 33, p. 1494-1502.

Shuttleworth, J.W. (1992), *Evaporation*, Handbook of Hydrology, p. 4.1-4.53.

Smith, R.E. (2002), *Infiltration Theory for Hydrologic Applications*, Washington, American Geophysical Union.

Wanielista, M., Kersten, R. et Eaglin, R. (1997), *Hydrology*, New York, John Wiley & Sons Inc.

## SYMBOLES DU CHAPITRE 7

$A$	: superficie
$C$	: paramètre d'évaporation
$e_a$	: pression de vapeur
$e_w$	: pression de vapeur de saturation
$E$	: évaporation journalière
$f$	: fonction d'infiltration
$f_0$	: infiltration maximum
$f_\infty$	: infiltration minimum
$F$	: fonction d'infiltration
$h$	: hauteur des précipitations
$i$	: intensité de pluie
$k$	: nombre de stations,
$K$	: paramètre d'infiltration
$N$	: nombre de stations pluviométriques
$P$	: intensité des précipitations, lame de pluie brute
$P_i$	: hauteur des précipitations à une station $i$
$t$	: temps
$V$	: vitesse du vent
$Z$	: taux effectif de réflexion (radar)
$\Delta$	: variation
$\phi$	: indice d'infiltration





# Chapitre 8

## *Modèles de transformation pluie-fonte-débit*

### Objectifs

- 1- Savoir séparer l'écoulement de base du ruissellement de surface dans un hydrogramme.
- 2- Calculer l'intensité de pluie de conception en fonction du risque hydrologique toléré.
- 3- Savoir choisir la durée critique de la pluie de conception.
- 4- Calculer le débit de conception pour une conduite de drainage.
- 5- Prédire la variation du ruissellement de surface à partir de la pluie nette.
- 6- Estimer la fonte des neiges à partir de variables pertinentes.

## 8.1 Introduction

Lorsqu'on s'intéresse à la prévision des crues et à la gestion des réservoirs, il est primordial de prédire les débits d'eau qui seront générés à l'exutoire d'un bassin versant à la suite d'une averse ou de la fonte des neiges. Pour cela, il faut estimer l'hyétogramme brut représentatif des précipitations tombées sur le bassin versant. Il faut ensuite en soustraire toutes les pertes : interception, infiltration, rétention et évaporation pour obtenir l'hyétogramme net. Le but recherché dans le présent chapitre est de savoir comment se transforme cet hyétogramme net en hydrogramme à l'exutoire du bassin versant.

## 8.2 Hydrogramme de ruissellement

### 8.2.1 Généralités

À la suite d'une averse, le débit qu'on observe à l'exutoire d'un bassin versant peut avoir quatre origines différentes :

- 1) ruissellement de surface,
- 2) précipitations directes sur la surface du cours d'eau,
- 3) écoulement hypodermique,
- 4) écoulement souterrain.

En général, le ruissellement de surface constitue la composante la plus importante dans le débit observé en période de crue. La contribution des précipitations directes sur le cours d'eau est en général négligeable mais elle est de toute façon intégrée dans le ruissellement de surface. L'écoulement hypodermique peut être très important dans un bassin où la couche perméable du bassin est fine. Les eaux qui s'infiltrant s'écoulent horizontalement sur la surface imperméable pour rejoindre le cours d'eau durant les heures et les jours qui suivent les précipitations. Cette partie est aussi intégrée dans le ruissellement de surface.

L'écoulement souterrain est en général très lent. Sa contribution peut être très faible durant la période de la crue mais peut être très importante du point de vue volume à l'échelle d'une année

### 8.2.2 Définitions

On appelle *hydrogramme* la série chronologique des débits successifs enregistrés à un endroit donné d'une rivière à la suite de précipitations ou de fonte des neiges.



La figure 8.1 montre un schéma d'hydrogramme type mesuré à l'exutoire d'un bassin versant (figure 8.2). La nomenclature utilisée est la suivante :

- le temps de montée  $T_M$  est le temps écoulé entre les points B et C qui délimitent la courbe de concentration,
- le temps de base  $T_B$  est le temps écoulé entre les points B et D; il représente la durée de ruissellement de surface,
- le temps de réponse  $Lag$  est le temps écoulé entre F et C, F représentant le centroïde de l'hyétoGramme,
- le débit de pointe  $Q_P$  est le débit maximal atteint en période de crue. C'est ce débit qui est normalement utilisé dans la conception des ouvrages hydrauliques (ponceau, conduite d'égout, évacuateur de crues...).

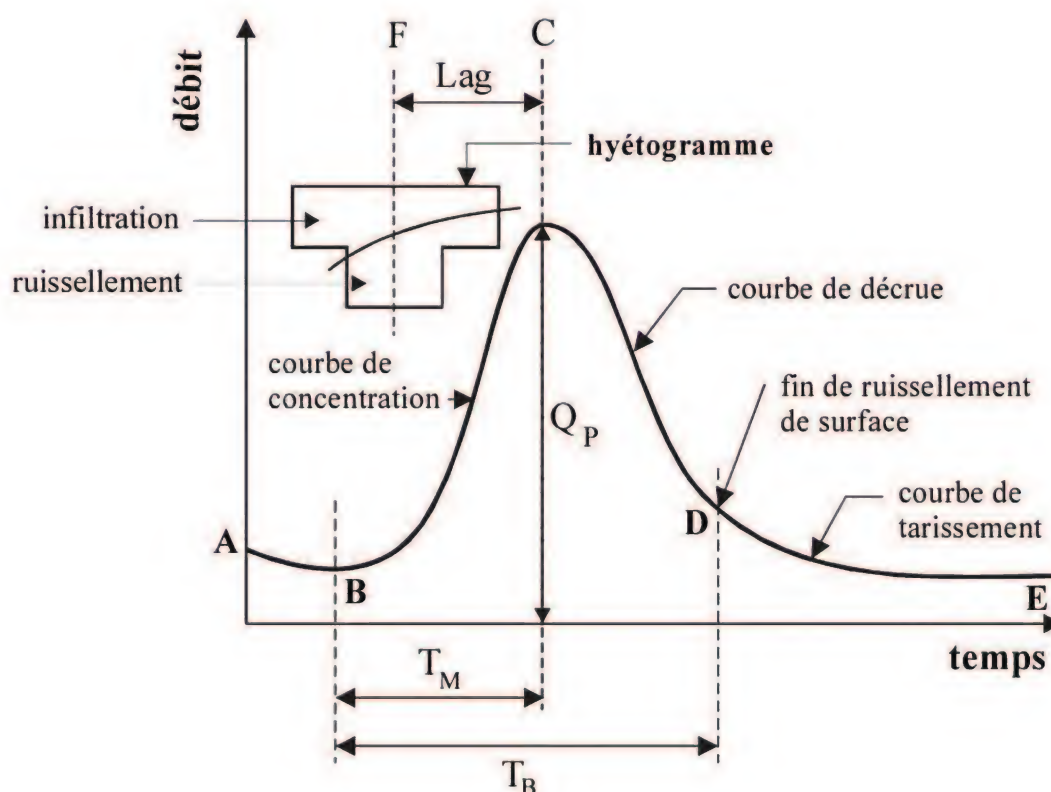


Fig. 8.1 Schéma d'un hydrogramme

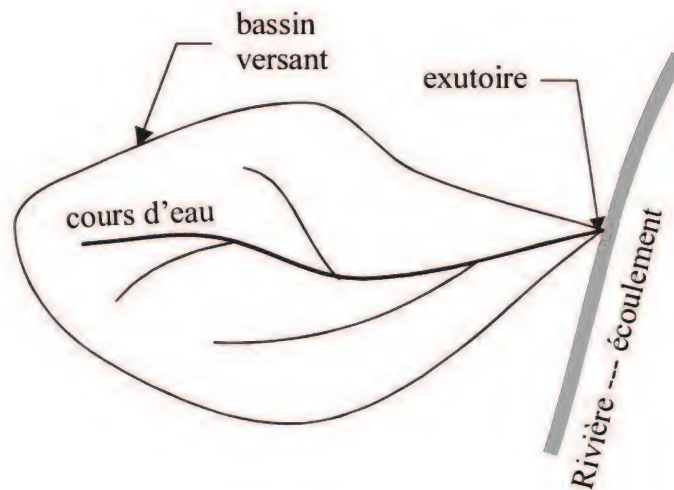


Fig. 8.2 Schéma d'un bassin versant

### 8.3 Séparation des différentes composantes de l'écoulement

On a vu dans le chapitre 7 que l'hyétogramme de pluie peut être séparé en deux composantes principales : 1) les pertes par infiltration qui alimentent les nappes souterraines, 2) le ruissellement de surface qui rejoint l'égout ou le cours d'eau immédiatement ou durant la pluie (figure 8.3).

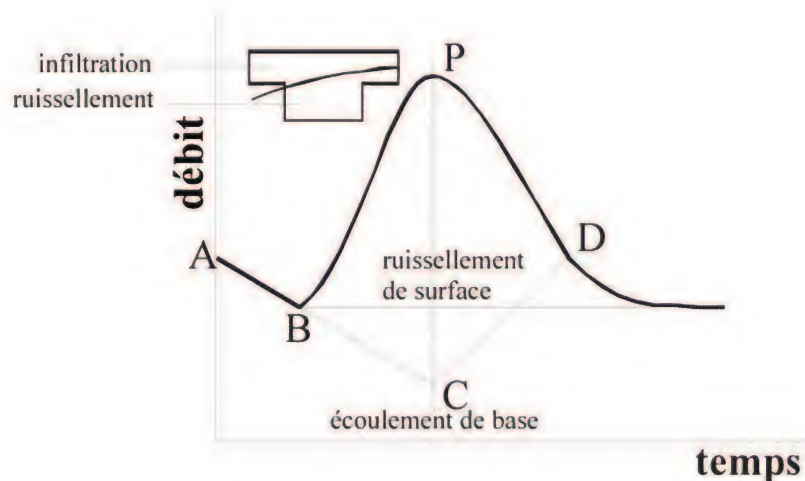


Fig. 8.3 Composantes de l'écoulement



L'hydrogramme de débit observé en temps de pluie ou de fonte à une section quelconque d'un cours d'eau ou d'un égout peut aussi être séparé en deux composantes principales : 1) *l'hydrogramme de base* qui représente le débit non relié aux précipitations en cours, 2) *l'hydrogramme de ruissellement* de surface généré par la pluie nette.

L'écoulement de base est généré par les nappes souterraines qui alimentent les cours d'eau à travers les pores des berges. Tel que mentionné, ces nappes sont à leur tour alimentées à partir des pluies et de la fonte par infiltration durant les semaines et les mois précédant la pluie en cours.

Pour une conduite d'égout située en-dessous du niveau de la nappe phréatique, la situation est similaire à celle d'une rivière. Les eaux provenant de la nappe phréatique et des fuites des réseaux d'aqueduc se fraient un chemin à travers les défauts des joints et les fissures pour s'infiltrer dans la conduite. Quand l'égout est combiné, le débit de base ou de temps sec renferme, en plus des infiltrations, des eaux usées domestiques et industrielles. Ces débits représentent une variation d'allure sinusoïdale sur vingt-quatre heures dont la moyenne peut varier selon la journée de la semaine et du mois.

Le débit de base provenant des eaux souterraines diminue dans le temps au fur et à mesure que les nappes se tarissent durant les périodes sèches. Durant une période de crue, une première méthode d'estimation du débit de base  $Q_{\text{base}}$  consiste à supposer qu'il demeure égal à sa valeur observée juste au moment où l'hydrogramme amorce sa montée. Ceci revient à tracer une ligne horizontale parallèle à l'axe des abscisses à partir du point B (figure 8.3). Une autre approche consiste à extrapoler la courbe de tarissement durant la période de crue à l'aide d'une courbe de la forme :

$$Q_{\text{base}}(t) = Q_0 e^{-at} \quad (8.1)$$

où  $Q_0$  est le débit initial,  
 $a$  est une constante propre au cours d'eau et qu'il faut déterminer.

Le point C indiqué sur la figure 8.3 se trouve à l'intersection de la courbe de récession avec la droite verticale passant par la pointe de l'hydrogramme. Le point D qui marque la fin du ruissellement de surface est caractérisé par une légère cassure qui peut être mise en évidence par une transformation logarithmique.

Compte tenu du fait que le débit de crue est en général plusieurs centaines de fois plus grand que le débit de base, la complexité de la méthode utilisée pour



déterminer le débit de base est superflue et on retient le plus souvent la première méthode.

## 8.4 Courbe de tarage

### 8.4.1 Principe

Les modèles mathématiques utilisés dans le présent chapitre permettent de simuler le débit d'écoulement à l'exutoire d'un bassin de drainage. Or le citoyen, menacé par l'inondation, est intéressé à connaître plutôt la remontée des niveaux d'eau. Il faut, par conséquent, établir une relation entre le niveau et le débit à une section stratégique de la rivière.

L'idée est donc de mener une campagne de mesures ponctuelles permettant de mesurer simultanément le débit et la profondeur par des moyens aussi précis que possible. Ces données sont utilisées pour étalonner une relation de la forme suivante, appelée courbe de tarage :

$$Q = a(h + h_0)^n \quad (8.2)$$

où  $a$  et  $n$  sont des constantes propres à la section de la rivière,  
 $h_0$  est un terme de correction pour obtenir le niveau réel,  
 $h$  est la profondeur d'écoulement.

Une fois la relation (8.2) étalonnée, la seule mesure de  $h$  permet de connaître le débit d'écoulement. Inversement, la connaissance du débit à partir d'un modèle de prévision permet de calculer la profondeur d'écoulement qui intéresse au premier chef les riverains qui craignent l'inondation.

### 8.4.2 Détermination des paramètres

La relation (8.2) peut être réécrite par une transformation logarithmique :

$$\log(Q) = \log(a) + n \cdot \log(h + h_0) \quad (8.3)$$

Cette équation comporte deux paramètres inconnus à déterminer :  $a$  et  $n$ . En théorie, deux couples de mesures de  $Q$  et de  $h$  permettent d'écrire les deux équations nécessaires pour trouver ces deux inconnues. Cependant, l'équation (8.2) comporte systématiquement deux sources d'erreurs :

- 1- erreur de modélisation : la relation qui lie  $Q$  et  $h$  est plus complexe que l'équation (8.2); cette relation est, de plus, différente durant la période de crue et la période de décrue,
- 2- erreur de mesure : les mesures de  $Q$  et de  $h$  sont systématiquement entachées d'erreurs.

C'est pour ces deux raisons que l'on effectue normalement le plus possible de mesures dans une grande gamme de variation du débit et de la profondeur.

Si par exemple on dispose de dix mesures simultanées du débit et de la profondeur, l'équation (8.3) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \log(Q_1) \\ \log(Q_2) \\ . \\ . \\ \log(Q_{10}) \end{bmatrix} = \log(a) + n \cdot \begin{bmatrix} \log(h_1 + h_0) \\ \log(h_2 + h_0) \\ . \\ . \\ \log(h_{10} + h_0) \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Une calculatrice programmable permet de fournir directement  $a$  et  $n$ .

Il faut souligner que la courbe de tarage doit normalement être calculée dans une section de contrôle où l'écoulement est critique (voir le chapitre 5). Cette courbe doit être étalonnée au moins une fois tous les cinq ans car elle peut être modifiée par l'érosion et la sédimentation.

## 8.5 Transformations pluie-débit

Prévoir le futur aide à mieux gérer le présent. Ceci est vrai aussi dans le domaine de l'eau où le gestionnaire d'un système hydrique est intéressé à connaître les débits futurs qui alimentent les réservoirs. Comme les données de base sont les variables météorologiques, il faut connaître les relations entre ces dernières et le débit dans la rivière. Ces transformations permettent de relier les précipitations enregistrées ou prévues, aux débits d'eau observés ou prévus à certains endroits stratégiques dans une rivière ou dans un réseau d'égout.

### 8.5.1 Méthode rationnelle

Malgré sa simplicité, la méthode rationnelle a été intensément utilisée pour concevoir la quasi totalité des réseaux d'égouts pluviaux en Amérique du Nord. Son équivalent européen, la méthode de Caquot, a connu le même succès outre Atlantique.



### 8.5.1.1 Formulation de la méthode

La méthode rationnelle est exprimée par la relation :

$$Q = K \cdot C \cdot i \cdot A \quad (8.5)$$

où  $Q$  est le débit de pointe en  $\text{m}^3/\text{s}$  (ou en  $\text{pi}^3/\text{s}$  en système anglais),  
 $C$  est le coefficient de ruissellement (compris entre 0 et 1),  
 $A$  est la superficie du bassin versant en hectares (en acres en système anglais),  
 $K$  est un facteur de conversion = 0,0028 (=1 en système anglais),  
 $i$  est l'intensité des précipitations en  $\text{mm}/\text{h}$ , supposée constante et uniforme sur tout le bassin durant toute la durée de la pluie (en  $\text{po}/\text{h}$  en système anglais).

### 8.5.1.2 Courbes intensité-durée-fréquence (IDF)

La méthode rationnelle fait abstraction de la distribution spatio-temporelle de l'averse. Les intensités utilisées sont tirées des courbes d'intensité - durée - fréquence IDF (figure 8.4) et sont appliquées uniformément sur l'ensemble du bassin.

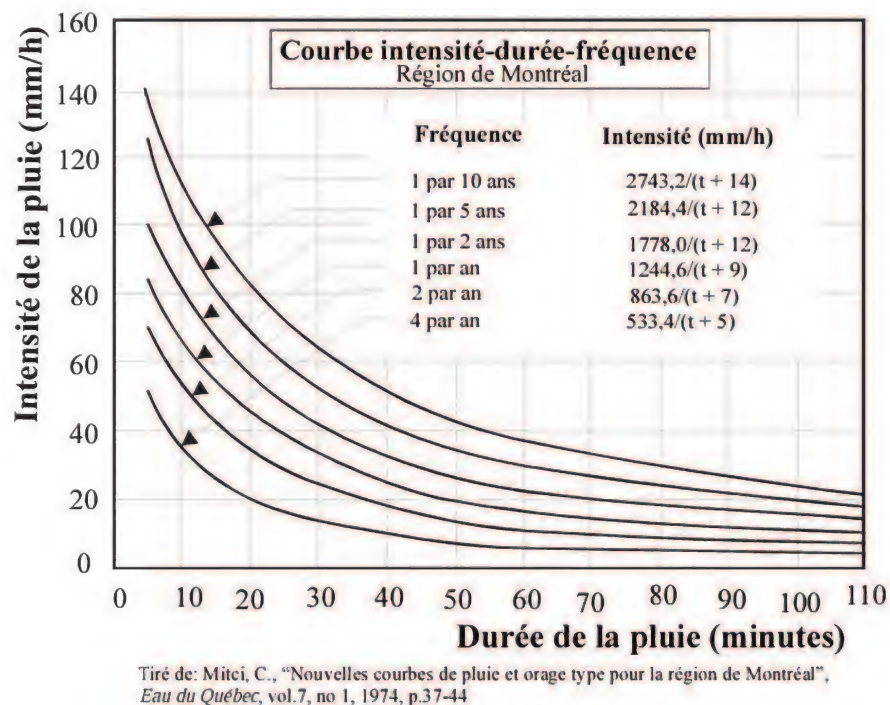


Fig. 8.4 Courbes intensité - durée - fréquence (région de Montréal)



La formule la plus couramment utilisée pour représenter la courbe IDF est celle de Grisollet (1948) :

$$i(t, T) = \frac{A(T)}{t + B(T)} \quad (8.6)$$

La formule de Mantana se présente sous la forme :

$$i(t, T) = A(T)t^{B(T)} \quad (8.7)$$

Keiffer et Chu (1957) combinent les deux formules précédentes sous la forme :

$$i(t, T) = \frac{A(T)}{t^{B(T)} + C(T)} \quad (8.8)$$

Dans ces formules,  $i$  représente l'intensité de la pluie en fonction du temps  $t$  pour une période de retour donnée  $T$ .  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes propres à chaque région et à chaque période de retour  $T$ . Ces constantes doivent être déterminées à partir des mesures historiques de la pluie. Lorsqu'on qualifie une intensité de pluie de décennale ou quinquennale, ceci signifie que la probabilité d'observer une intensité de pluie qui lui est égale ou supérieure est respectivement  $1/10$  ou  $1/5$ . D'une manière générale, la période de retour  $T$  d'une intensité  $I_T$  se définit par la probabilité  $P(I \geq I_T) = 1/T$ . Le débit généré par l'intensité  $I_T$  et calculé par la formule (8.5) doit avoir la même période de retour que la pluie.

### 8.5.1.3 Choix de la durée de la pluie

La figure 8.4 montre que pour une fréquence donnée, l'intensité de la pluie décroît avec la durée. On pourrait par conséquent être amené à penser à tort que plus la durée choisie est courte plus le débit est grand et la structure d'évacuation sera surdimensionnée.

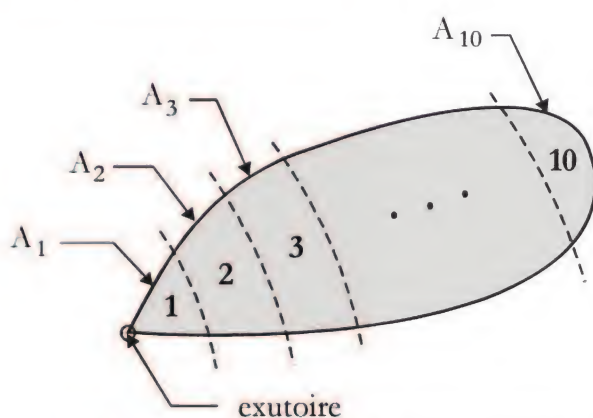


Fig. 8.5 Découpage d'un bassin versant

Afin d'éclairer le choix judicieux de la durée de la pluie, considérons à titre d'exemple un bassin de drainage et découpons-le en dix zones de superficies  $A_1, A_2 \dots A_{10}$  (figure 8.5).

Supposons que les gouttes qui tombent dans les zones 1, 2 ... 10 arrivent respectivement à l'exutoire au bout de 1, 2 ... 10 minutes. Dans un tel cas on dit que les surfaces sont isochrones.

Supposons maintenant une pluie dont l'intensité est  $i$  et la durée 1 minute. Pendant la première minute, seule la surface  $A_1$  contribue à l'écoulement, le ruissellement des autres surfaces n'ayant pas eu encore le temps de se rendre à l'exutoire. Le débit à l'exutoire est alors :

$$Q_1 = K \cdot C \cdot i \cdot A_1$$

Durant la deuxième minute, la pluie s'est déjà arrêtée et le ruissellement de la surface  $A_1$  est épuisé. Donc, seule la surface  $A_2$  contribue au ruissellement, l'eau des autres surfaces  $A_3$  à  $A_{10}$  n'ayant pas encore eu le temps de se rendre à l'exutoire. Le débit à l'exutoire durant la deuxième minute est donc :

$$Q_2 = K \cdot C \cdot i \cdot A_2$$

Par un raisonnement similaire, on trouve pour les autres minutes :

3 <sup>e</sup> minute	$Q_3 = K \cdot C \cdot i \cdot A_3$
.....	
10 <sup>e</sup> minute	$Q_{10} = K \cdot C \cdot i \cdot A_{10}$
11 <sup>e</sup> minute	$Q_{11} = 0$

On comprend donc déjà que si la durée de la pluie est trop courte, la surface contribuant à l'écoulement est une fraction de la surface totale. La structure de drainage projetée est alors sous-dimensionnée, contrairement à ce qu'on aurait pensé au départ.

Considérons maintenant une pluie de même intensité  $i$  mais d'une durée de deux minutes. Durant la première minute, le débit est identique à la pluie de même intensité de durée d'une minute :

$$Q_1 = K \cdot C \cdot i \cdot A_1$$

Durant la deuxième minute, pendant qu'il pleut encore, les deux surfaces  $A_1$  et  $A_2$  contribuent simultanément à l'écoulement et le débit devient :

$$Q_2 = K C i A_1 + K C i A_2 = K C i (A_1 + A_2)$$

Durant la troisième minute, la pluie s'est déjà arrêtée et le ruissellement provenant de la surface  $A_1$  est épuisé. Seules les surfaces  $A_2$  et  $A_3$  contribuent à l'écoulement et le débit de ruissellement de la troisième minute est :

$$Q_3 = KCi(A_2 + A_3)$$

Par un raisonnement similaire, on trouve pour les autres minutes :

4 <sup>e</sup> minute	$Q_4 = KCi(A_3 + A_4)$
.....	
10 <sup>e</sup> minute	$Q_{10} = KCi(A_9 + A_{10})$
11 <sup>e</sup> minute	$Q_{11} = KCiA_{10}$
12 <sup>e</sup> minute	$Q_{12} = 0$

On voit encore que pour une pluie d'une durée de deux minutes, on a au maximum deux surfaces qui contribuent simultanément au ruissellement à l'exutoire.

Il devient clair que pour faire contribuer simultanément toutes les surfaces élémentaires  $A_i$  du bassin au ruissellement à l'exutoire, il faut prendre une durée de pluie égale à dix minutes. Dans ce cas, au bout de dix minutes, le débit sera :

$$Q_{10} = KCi(A_1 + A_2 + \dots + A_{10})$$

La durée de dix minutes, choisie à titre d'exemple, est le temps de concentration de ce bassin.

Le temps de concentration d'un bassin versant est défini comme le temps mis par l'eau pour parcourir la distance entre le point le plus éloigné hydrauliquement de l'exutoire et ce dernier.

Quel est l'effet sur le débit si la durée de la pluie devient supérieure au temps de concentration? Paradoxalement, comme pour les durées trop courtes, on risque encore de sous-estimer le débit de pointe. Car d'une part, la surface contributive est déjà à son maximum et ne peut pas augmenter. D'autre part, l'intensité de la pluie diminue car la durée augmente (voir la figure 8.4).

#### 8.5.1.4 Estimation du temps de concentration

Il existe dans la littérature technique plusieurs formules pour estimer le temps de concentration  $t_c$ . Nous citons ici les formules les plus utilisées. La notation dans ces formules est la suivante :



SI désigne le système international d'unités,  
 SA désigne le système américain d'unités,  
 $t_c$  désigne le temps de concentration en minutes.

**- Formule de Kirpich (zone agricole) :**

Kirpich (1940) a étalonné la formule suivante après plusieurs expériences sur six petits bassins versants en Pennsylvanie :

$$t_c = K_1 \cdot L^{0,77} \cdot S^{-0,385} \quad (8.9)$$

où  $K_1 = 0,1147$  en SI;  $0,0459$  en SA,  
 $L$  est la longueur de parcours (m en SI, pi en SA),  
 $S$  est la pente moyenne du bassin en %.

Lorsque la longueur de parcours ne peut pas être mesurée, on peut utiliser la formule suivante dans un avant-projet :

$$L = K_L \cdot A^{0,568} \quad (8.10)$$

où  $L$  est la longueur de parcours (m en SI; pi en SA),  
 $K_L = 95,95$  en SI;  $188,3$  en SA,  
 $A$  est l'aire du bassin (ha en SI; acres en SA).

**- Formule de la FAA (Federal Aviation Agency) :**

La FAA (1970) a développé aux Etats-Unis la formule suivante pour estimer le temps de concentration pour les terrains d'aviation :

$$t_c = K_2 \cdot (1,1 - C) \cdot \frac{\sqrt{L}}{S^{0,333}} \quad (8.11)$$

où  $K_2 = 3,26$  en SI;  $1,8$  en SA,  
 $C$  est le coefficient de ruissellement,  
 $L$  est la longueur de parcours (m en SI, pi en SA),  
 $S$  est la pente représentative de la surface, en %.

**- Formule de l'onde cinématique :**

Cette formule a été dérivée de l'analyse de l'onde cinématique de ruissellement sur des bassins développés (Viessman et Lewis, 1956) :

$$t_c = K_4 \frac{L^{0,6} n^{0,6}}{i^{0,4} S^{0,3}} \quad (8.12)$$

où  $K_4 = 6,92$  en SI;  $0,94$  en SA,  
 $L$  est la longueur de parcours (m en SI, pi en SA),  
 $i$  est l'intensité de l'averse (mm/h en SI; po/h en SA),  
 $n$  est le coefficient de Manning,  
 $S$  est la pente moyenne du bassin (m/m ou pi/pi).

Cette formule présente l'inconvénient d'être implicite car le temps de concentration  $t_c$  dépend de l'intensité de la pluie qui est l'inconnue du problème. Elle doit donc être résolue par itérations.

#### 8.5.1.5 Coefficient de ruissellement $C$

$C$  est le paramètre de la méthode rationnelle le plus difficile à déterminer. Ce paramètre englobe le degré d'imperméabilité, les pertes dues à l'infiltration, le stockage dans les dépressions, la pente du terrain, l'intensité de l'averse et les conditions d'humidité du sol. Ce paramètre doit être choisi judicieusement car une surestimation de  $C$  peut conduire à un surdimensionnement des ouvrages et donc à des coûts élevés. D'un autre côté, une sousestimation de  $C$  peut remettre en cause la sécurité d'exploitation des ouvrages. Les tableaux 8.1 et 8.2 donnent les ordres de grandeur du coefficient  $C$  en fonction de la nature de la surface et de l'utilisation du sol.

Normalement un bassin de drainage comprend plusieurs types de surfaces avec des coefficients de ruissellement différents. Dans ce cas, le coefficient de ruissellement pondéré se calcule par la relation suivante pour  $n$  zones:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n C_i A_i}{A} \quad (8.13)$$

Nature de la surface	Coefficient de ruissellement
Pavage	0,85
Toit	0,85
Gazon :	
plat (< 2%)	0,10
moyen (2 à 7%)	0,15
pente raide (> 7%)	0,20

Tableau 8.1 Coefficients de ruissellement  $C$  d'après la nature de la surface

Type de district	Coefficient de ruissellement
Commercial	0,85
Résidentiel	
unifamilial	0,40
multifamilial	0,70
banlieue	0,35
Édifices à logements	0,70
Industriel	0,75
Parcs et cimetières	0,20
Terrains de jeux	0,20
Terrains vagues	0,20

Tableau 8.2 Coefficients de ruissellement C selon le type de district

#### 8.5.1.6 Limites de la méthode rationnelle

Malgré son utilisation intensive depuis plus d'un siècle, la méthode rationnelle comporte de sérieuses limitations inhérentes aux hypothèses de base :

- La méthode rationnelle se limite au calcul du débit de pointe de l'hydrogramme associé à une précipitation d'une intensité uniforme; elle ne fournit pas l'hydrogramme de crue. En pratique, on suppose un hydrogramme triangulaire dont le temps de base est :  $T_B = T_c + T_r$ , où  $T_r$  est la durée de la pluie. Le temps de montée est égal au temps de concentration si la durée de la pluie  $T_r \geq T_c$ . Dans le cas contraire, il est égal à la durée de la pluie.
- Chaque tronçon d'un réseau d'assainissement est conçu pour une intensité différente de celle des autres.
- La méthode rationnelle ne considère pas la capacité de stockage du réseau de ruissellement, ni la propagation des hydrogrammes dans les conduites. Ceci conduit généralement à un surdimensionnement des ouvrages.
- La méthode rationnelle se limite à des bassins urbains d'une superficie maximale de quelques centaines d'hectares.

### 8.5.2 Méthode de l'hydrogramme unitaire

#### 8.5.2.1 Définition

On appelle *hydrogramme unitaire* (HU), l'hydrogramme résultant d'une averse uniforme sur le bassin, donnant une lame de ruissellement d'une hauteur d'un millimètre ou d'un pouce (figure 8.6).



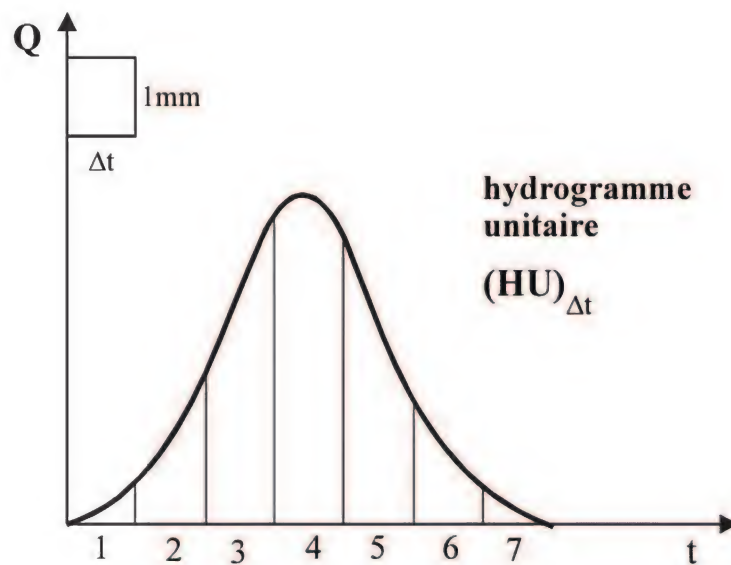


Fig. 8.6 Hydrogramme unitaire

L'hydrogramme unitaire fait référence à la durée  $\Delta t$  de la pluie qui a généré la lame de 1 millimètre. Ainsi on note  $(HU)_{\Delta t}$ .

#### 8.5.2.2 Principe de la méthode

La méthode de l'hydrogramme unitaire est basée sur l'hypothèse que tous les hydrogrammes résultant d'averses uniformes d'intensités différentes, mais de même durée sur un bassin, ont un temps de base  $T_B$  identique.

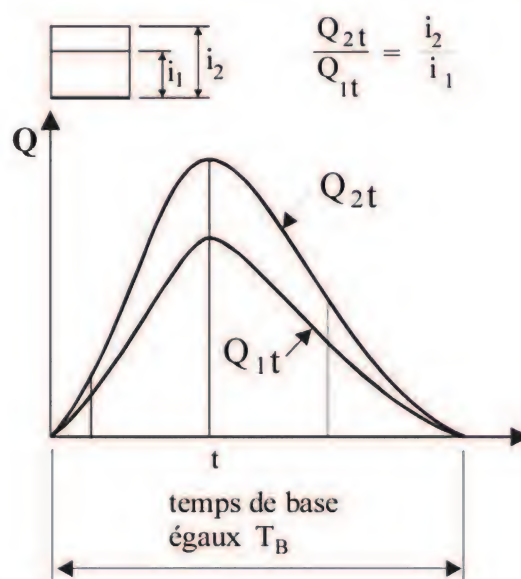


Fig. 8.7 Hypothèse de la méthode de l'hydrogramme unitaire

On suppose aussi que les ordonnées homologues des divers hydrogrammes qui correspondent à des averses de même durée sont proportionnelles aux intensités des averses correspondantes (figure 8.7 ).

L'hydrogramme résultant de la succession d'événements pluvieux est la somme des hydrogrammes qui correspondent à chacune des pluies (figure 8.8). Le principe de superposition des phénomènes linéaires s'applique.

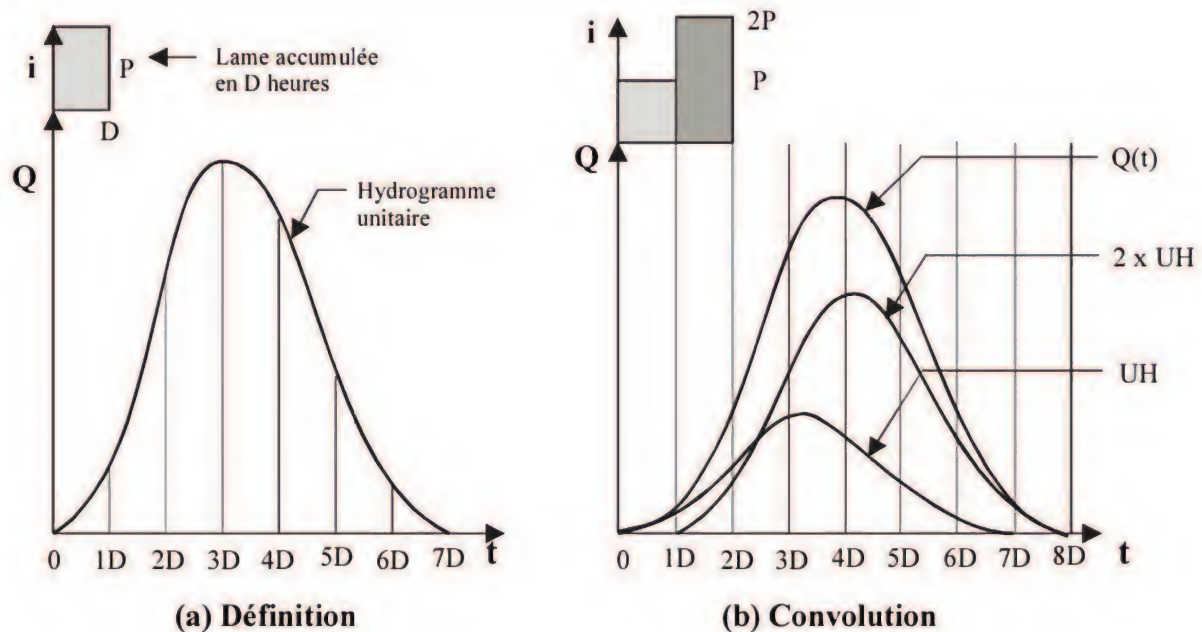


Fig. 8.8 Principe de la méthode de l'hydrogramme unitaire

### 8.5.2.3 Calcul de l'hydrogramme unitaire à partir des précipitations et du débit

Pour appliquer la méthode de l'hydrogramme unitaire dans les meilleures conditions, on choisit un cas de précipitations parmi celles enregistrées, dont la durée  $t_r = t_c/3$  ou  $t_c/5$ . Ceci suppose bien sûr que le temps de concentration  $t_c$  du bassin étudié a déjà été calculé.

L'écoulement de base est séparé du ruissellement de surface à partir de l'hydrogramme de crue correspondant à l'averse considérée. À partir du volume de ruissellement, il est possible de déduire les précipitations nettes et donc les pertes par infiltration et évaporation.

Finalement, on réduit les ordonnées de l'hydrogramme de ruissellement ainsi obtenu par le rapport des précipitations nettes pour obtenir l'hydrogramme unitaire.

### Application 8.1

L'hydrogramme donné dans le tableau 8.3 correspond à un orage de 1 heure et des précipitations brutes de 20 millimètres. La superficie du bassin versant est de 600km<sup>2</sup>. Il faut déterminer l'hydrogramme unitaire pour ce bassin.

Temps (heures)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Débit (m <sup>3</sup> /s)	98	98	220	512	620	585	460	300	105	98	98

Tableau 8.3 Hydrogramme d'un orage

La première étape consiste à soustraire le débit de base pour obtenir l'hydrogramme de ruissellement de surface (tableau 8.4) :

Temps (heures)	Débit total (m <sup>3</sup> /s)	Débit de base (m <sup>3</sup> /s)	Ruissellement (m <sup>3</sup> /s)
1	98	98	0
2	98	98	0
3	220	98	122
4	512	98	414
5	620	98	522
6	585	98	487
7	460	98	362
8	300	98	202
9	105	98	7
10	98	98	0
11	98	98	0
<b>TOTAL</b>			<b>2116m<sup>3</sup>/s</b>

Tableau 8.4

Le volume de ruissellement direct est égal à :

$$2116\text{m}^3/\text{s} \times 3600\text{s} = 76,176 \times 10^5 \text{ m}^3.$$

La lame du ruissellement direct est égal à :

$$\text{Volume/Superficie} = 12,7\text{mm}.$$

On peut donc déduire que les pertes par infiltration, dépressions et évapotranspiration sont :

$$20\text{mm} - 12,7\text{mm} = 7,3\text{mm}.$$



L'hydrogramme unitaire correspondant à 1mm de ruissellement est donc donné par l'hydrogramme de ruissellement calculé au tableau 8.4 divisé par 12,7mm, tel que montré dans le tableau 8.5.

Temps	Hydrogramme de ruissellement réel	Hydrogramme unitaire (m <sup>3</sup> /s/mm)
1	122	9,6
2	414	32,6
3	522	41,1
4	487	38,3
5	362	28,5
6	202	15,9
7	7	0,55
<b>TOTAL</b>		<b>166,59m<sup>3</sup>/s/mm</b>

Tableau 8.5

Si on calcule la lame de ruissellement de l'hydrogramme unitaire, on obtient :

$$\frac{\text{Volume}}{\text{Superficie}} = \frac{166,59 \text{ m}^3 / \text{s} / \text{mm} \cdot 3600 \text{ s}}{600 \cdot 10^6 \text{ m}^2} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,0 \text{ mm}$$

#### 8.5.2.4 Utilisation de l'hydrogramme unitaire

Selon la théorie exposée précédemment, chaque bassin versant possède son propre hydrogramme unitaire. Cet hydrogramme qui caractérise le bassin reste invariable, à moins de changements hydrologiques importants sur ledit bassin, comme un déboisement ou un aménagement hydraulique. Une fois cet hydrogramme déterminé, on peut prédire l'hydrogramme de crue correspondant à n'importe quelle averse complexe de durée et d'intensité autres que celles de l'hydrogramme unitaire. Le principe à utiliser est celui de la superposition exposé à la figure 8.8.

D'une façon générale, si on désigne par  $i_1, i_2, \dots, i_t$  les intensités des précipitations enregistrées, par  $U_1, U_2, \dots, U_n$  les ordonnées successives de l'hydrogramme unitaire, le débit de crue correspondant à l'averse en question s'obtient par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = i_1 U_1 \\ Q_2 = i_1 U_2 + i_2 U_1 \\ Q_3 = i_1 U_3 + i_2 U_2 + i_3 U_1 \\ \vdots \\ Q_n = \sum_{K=1}^n i_K U_{n+1-K} \end{array} \right. \quad (8.14)$$

### Application 8.2

À partir de l'hydrogramme calculé dans l'exemple précédent, il faut déterminer l'hydrogramme de ruissellement correspondant à l'hyétogramme donné dans le tableau 8.6.

Temps (heures)	1	2	3	4
Précipitations nettes (mm)	10	20	5	2

Tableau 8.6

On obtient les résultats montrés dans le tableau 8.7.

Temps	HU (m <sup>3</sup> /s/mm)	HU·10mm (m <sup>3</sup> /s)	HU·20mm (m <sup>3</sup> /s)	HU·5mm (m <sup>3</sup> /s)	HU·2mm (m <sup>3</sup> /s)	Ruisselle- ment total
1	9,6	96	0	0	0	96
2	32,6	326	192	0	0	518
3	41,1	411	652	48	0	1111
4	38,3	383	822	163	19,2	1387
5	28,5	285	767	205,5	65,2	1322,5
6	15,9	159	570	191,7	82,2	1002,9
7	0,55	5,5	318	142,5	76,7	542,7
8			11	79,5	57	147,5
9				2,75	31,8	34,6
10					1,1	1,1

Tableau 8.7

Le système d'équations (8.14) peut être utilisé pour calculer l'hydrogramme unitaire d'un bassin à partir d'une averse complexe et de son hydrogramme de crue correspondant.

### ***Application 8.3***

Il faut calculer l'hydrogramme unitaire d'un bassin dont l'hyétogramme est fourni par le tableau 8.6 et l'hydrogramme de ruissellement résultant mesuré est fourni dans la dernière colonne du tableau 8.7.

En écrivant la première équation du système (8.14) on obtient :

$$96\text{m}^3/\text{s} = 10 U_1, \text{ soit } U_1 = 9,6\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}.$$

En substituant cette valeur dans la deuxième équation on obtient :

$$518\text{m}^3/\text{s} = 10 U_2 + 20 \cdot 9,6\text{m}^3/\text{s}, \text{ soit } U_2 = 32,6\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}.$$

Par un procédé similaire, on retrouve successivement toutes les ordonnées de l'hydrogramme unitaire. Malheureusement, cette méthode analytique n'est pas applicable compte tenu des erreurs de mesure de la pluie et du débit ainsi que de l'hypothèse de linéarité. On doit avoir recours à la méthode des moindres carrés pour trouver  $U_1, U_2 \dots U_n$ .

### **8.5.3 Hydrogramme unitaire synthétique**

Plusieurs bassins ne possèdent pas de stations de mesure du débit. Il n'est donc pas possible d'utiliser la méthode de l'hydrogramme unitaire qui nécessite la connaissance de l'hydrogramme de crue mesurée correspondant à une pluie réelle. Dans de telles circonstances, on peut utiliser un hydrogramme unitaire synthétique dérivé à partir des propriétés du bassin. Plusieurs méthodes existent pour trouver un hydrogramme unitaire synthétique. L'hydrogramme unitaire synthétique triangulaire développé par le Soil Conservation Service (SCS, 1972) est schématisé par la figure 8.9.



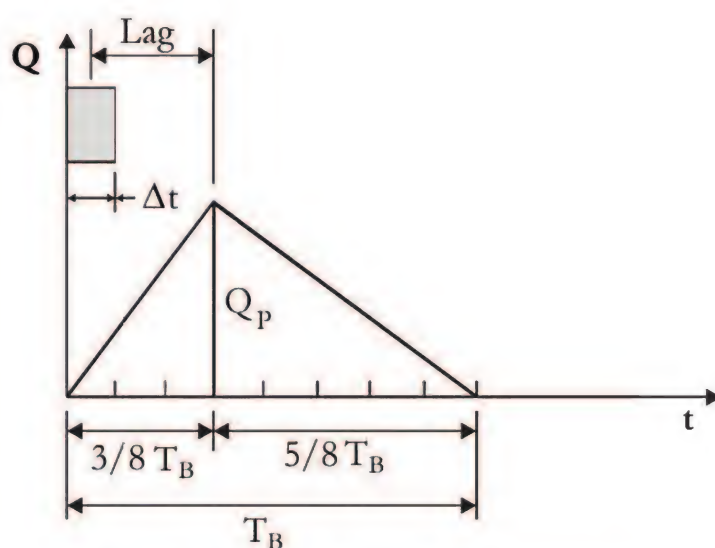


Fig. 8.9 Hydrogramme unitaire synthétique

Dans cette méthode, la durée de la pluie  $\Delta t$  qui génère l'hydrogramme unitaire doit être inférieure à  $\text{Lag}/4$ ,  $\text{Lag}$  étant le retard de la pointe du débit par rapport à la pluie. Ce retard est estimé par la formule suivante :

$$\text{Lag} = 0,6 \cdot t_c \quad (8.15)$$

où  $t_c$  est le temps de concentration défini précédemment.

Le temps de montée est par conséquent:

$$T_M = \frac{\Delta t}{2} + 0,6 t_c \quad (8.16)$$

La durée de la pluie est liée au temps de concentration par la relation empirique suivante :

$$\Delta t = 0,133 \cdot t_c \quad (8.17)$$

En combinant (8.16) et (8.17), on trouve la relation suivante pour le temps de montée :

$$T_M = 0,67 t_c \quad (8.18)$$

En écrivant que le volume en-dessous de l'hydrogramme correspond à une lame d'eau de 1 millimètre, on trouve la relation :

$$Q_p = 0,208 \frac{A}{T_M} \quad (8.19)$$

où  $A$  est la surface du bassin exprimée en  $\text{km}^2$ ,  
 $T_M$  est le temps de montée exprimé en heures.

### Application 8.4

Un bassin de drainage a une superficie de 200 hectares. La pente moyenne est estimée à  $S_0 = 1,0\%$  et la longueur de parcours hydraulique à  $L = 1,5\text{km}$ . Le coefficient de ruissellement est  $C = 0,50$ . Il faut calculer l'hydrogramme unitaire synthétique.

En utilisant la formule de la FAA (8.10) :

$$t_c = 3,26(1,1 - 0,5) \frac{\sqrt{1500\text{m}}}{1\%^{0,333}} = 75,76 \text{ minutes} = 1,26\text{h}$$

D'après (8.17), la durée de la pluie est  $\Delta t = 0,133 \cdot 1,26\text{h} = 0,167\text{h}$ , soit 10 minutes.

D'après (8.18),  $T_M = 0,67 \cdot 1,26\text{h} = 0,844\text{h}$ .

D'après la figure 8.9,  $T_M = 3/8 \cdot T_B$ .

Donc le temps de base est  $T_B = T_M \cdot 8/3 = 0,844\text{h} \cdot 8/3 = 2,25\text{h}$ .

D'après (8.19), le débit de pointe est  
 $Q_p = 0,208 \cdot 2,0\text{km}^2 / 0,844\text{h} = 0,493\text{m}^3/\text{s}$ .

L'hydrogramme unitaire pour une pluie de  $\Delta t = 10$  minutes est obtenu tel que montré sur la figure 8.10.

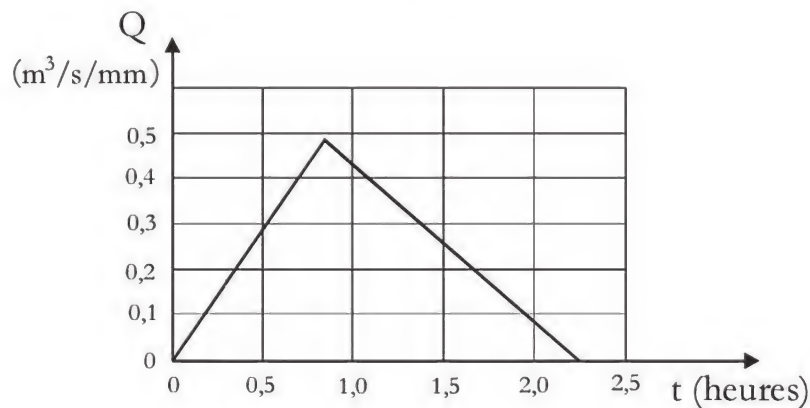


Fig. 8.10 Exemple d'hydrogramme unitaire

### 8.5.4 Méthode du réservoir non linéaire

La méthode du réservoir non linéaire est très utilisée en milieu urbain lorsqu'on fait appel à l'informatique. Elle est en particulier utilisée dans le modèle SWMM (Huber *et al.*, 1988).

Le ruissellement sur un bassin est modélisé par un réservoir schématisé à la figure 8.11.

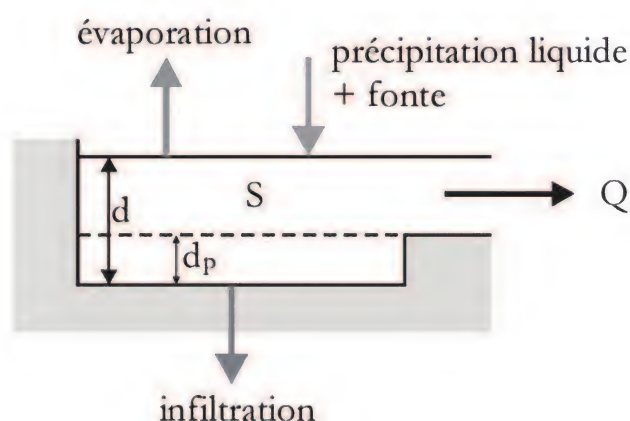


Fig. 8.11 Schéma du réservoir non linéaire

La méthode du réservoir non linéaire est basée sur le couplage de l'équation de continuité et de l'équation de Manning (5.12). L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{dS}{dt} = A \frac{dd}{dt} = Ai^* - Q \quad (8.20)$$

- où
- $d$  est la profondeur de l'eau du bassin (m),
  - $A$  est la surface du bassin ( $m^2$ ),
  - $S = Ad$  est le volume d'eau disponible dans le bassin à l'instant  $t$  ( $m^3$ ),
  - $t$  est le temps instantané (s),
  - $i^*$  est l'intensité des précipitations nettes (pluie brute + fonte – infiltration – évaporation) en m/s.



Le débit de sortie  $Q$  (figure 8.11) est donné par l'équation de Manning écrite sous la forme suivante:

$$Q = W \frac{1}{n} (d - d_p)^{5/3} S_0^{1/2} \quad (8.21)$$

où  $W$  est la largeur du bassin (paramètre à étalonner),  
 $n$  est le coefficient de Manning,  
 $d_p$  est la profondeur de stockage dans les dépressions (m),  
 $S_0$  est la pente du terrain (m/m).

Si le bassin est réellement rectangulaire, la largeur  $W$  représente effectivement la vraie grandeur de cette largeur. Autrement,  $W$  devient un paramètre d'étalonnage pour ajuster les débits simulés aux valeurs mesurées.

En utilisant l'équation de Manning (8.21) dans l'équation de continuité (8.20), on obtient l'équation à résoudre suivante:

$$\frac{dd}{dt} = i^* - W \frac{S_0^{1/2}}{nA} (d - d_p)^{5/3} \quad (8.22)$$

Sous forme de différences finies, l'équation (8.22) devient :

$$\frac{d_2 - d_1}{\Delta t} = i^* - W \frac{S_0^{1/2}}{nA} \left[ d_1 + \frac{1}{2} (d_2 - d_1) - d_p \right]^{5/3} \quad (8.23)$$

À chaque intervalle de temps, la valeur de  $d_2$  est trouvée par la méthode itérative de Raphson-Newton. Les différentes valeurs successives des profondeurs  $d$  permettent ensuite de calculer les débits correspondant à l'exutoire du bassin en utilisant l'équation (8.21).

## 8.6 Modèle de fonte des neiges

### 8.6.1 Introduction

La fonte des neiges constitue une part importante des écoulements dans les régions nordiques ou montagneuses. Malgré l'intérêt croissant des hydrologues, la prévision de la fonte reste un problème assez complexe qui fait intervenir une multitude de paramètres. On peut ramener les modèles de calcul de la fonte en deux grandes classes : les modèles détaillés et les modèles globaux. Les modèles détaillés reconstituent mathématiquement l'influence des facteurs physiques qui

agissent effectivement sur un bassin. Ils sont basés sur des lois générales de la physique, donc transposables d'un bassin à un autre (Llamas, 1993). Les modèles globaux sont basés sur des relations mathématiques issues d'analyses statistiques. Les modèles empiriques et conceptuels rentrent aussi dans cette deuxième catégorie (Bennis, 1987).

Le choix d'un modèle particulier doit être fait en considérant plusieurs facteurs parmi lesquels la disponibilité des données est sûrement le plus restrictif. En effet, dans la majorité des bassins versants, les variables météorologiques facilement accessibles sont les précipitations et les températures journalières. C'est en partie pour cette raison que la grande majorité des modèles de crue sont basés uniquement sur ces deux variables.

L'hypothèse selon laquelle tous les échanges énergétiques peuvent être ramenés à une dépendance unique de la température est d'autant plus vérifiée que les autres facteurs dont on ne tient pas compte (condition d'ensoleillement, vent, humidité) sont soit proches des valeurs normales pour les modèles détaillés, soit proches des valeurs d'étalonnage pour les modèles globaux.

### 8.6.2 Modèle des degrés-jours

Le modèle le plus simple est celui des degrés-jours qui ne prend en considération que la température journalière pour évaluer la fonte (U.S. Army, 1956) :

$$M = \alpha(T - C) \quad (8.24)$$

où  $M$  est la fonte (cm/j),  
 $T$  est la température moyenne journalière ( $^{\circ}\text{C}$ ),  
 $C$  est la température de base à laquelle commence la fonte ( $^{\circ}\text{C}$ ) ;  
 $C$  varie entre 0 et  $4^{\circ}\text{C}$  mais on prend souvent  $C = 0^{\circ}\text{C}$ ,  
 $\alpha$  est une constante de fonte qui peut être estimée à l'aide de la relation (Martinec, 1960) :

$$\alpha = 1,1 \frac{\rho_s}{\rho_w} \quad (8.25)$$

où  $\alpha$  est le facteur de fonte ( $\text{cm}/^{\circ}\text{C}/\text{j}$ ),  
 $\rho_s$  et  $\rho_w$  sont les masses volumiques de la neige et de l'eau.

Comme la masse volumique de la neige fondante varie normalement entre  $0,30\text{g/cm}^3$  et  $0,55\text{g/cm}^3$ , le facteur  $\alpha$  varie entre 0,3 et 0,6. Ce facteur de fonte  $\alpha$  croît avec la densité de la neige durant la saison de fonte.

Basé sur le même principe, le modèle proposé par Bray (1965) est une généralisation du modèle degrés-jours (8.24) :

$$M_n = \alpha [0,6(T_n - C) + 0,3(T_{n-1} - C) + 0,1(T_{n-2} - C)] \quad (8.26)$$

où  $M_n$  est la fonte au jour  $n$  (cm/j),  
 $C$  est la température de base ( $^{\circ}\text{C}$ ),  
 $T_n$  est la température moyenne au jour  $n$  ( $^{\circ}\text{C}$ ),  
 $T_{n-1}$  est la température moyenne au jour  $n-1$  ( $^{\circ}\text{C}$ ),  
 $T_{n-2}$  est la température moyenne au jour  $n-2$  ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Les deux équations (8.25) et (8.26) ont été utilisées et comparées par Pysklywec (1968) : les résultats obtenus étaient similaires. Cet auteur a proposé aussi l'équation de régression suivante qui tient compte d'autres variables météorologiques :

$$M = 1,549 + 0,947E + 0,00368R_b + 0,00317(1,8T - 4) + 0,690R_b V + 0,0126PT \quad (8.27)$$

où  $M$  est le débit de fonte (cm/j),  
 $E$  est l'ensoleillement (h/j),  
 $R_b$  est le rayonnement à ondes longues ( $\text{J/cm}^2/\text{j}$ ),  
 $T$  est la température moyenne de l'air ( $^{\circ}\text{C}$ ),  
 $V$  est la vitesse du vent (km/h),  
 $f$  est l'humidité relative,  
 $P$  est la pluie (cm/j).

L'équation (8.27) a été étalonnée à partir de données recueillies sur certains bassins hydrographiques du Canada.

### 8.6.3 Modèle de transformation pluie-fonte-débit

#### 8.6.3.1 Introduction

Martinec (1986) a proposé un modèle de transformation pluie-fonte-débit qui a été largement utilisé dans plusieurs pays. Ce modèle est détaillé car il tient compte de certains paramètres physiques propres au bassin étudié. Il est aussi global car certains de ses paramètres sont déterminés par des techniques



mathématiques indépendantes des phénomènes physiques en jeu. Ce modèle a été utilisé par Bennis (1991) pour développer un logiciel de prévision des crues pour la rivière Saint-François située au Québec.

### 8.6.3.2 Équation de prédiction

Le débit d'écoulement dans un tronçon donné de rivière peut être exprimé par la relation (Martinec *et al.*, 1983 et 1986) :

$$Q_{n+1} = [C_{sn} \alpha_n (T_n + \Delta T_n) S_n + C_m P_n] \frac{0,01A}{86400} (1 - xQ_n^{-y}) + xQ_n^{1-y} \quad (8.28)$$

où  $Q$  est le débit journalier moyen ( $m^3/s$ ),  
 $C_{sn}$  est le coefficient de ruissellement pour la fonte,  
 $C_m$  est le coefficient de ruissellement pour les précipitations,  
 $\alpha$  est le coefficient de fonte ( $cm/^\circ C/j$ ),  
 $T$  est le nombre de degrés-jours au-dessus de  $0^\circ C$ ,  
 $\Delta T$  est l'ajustement de la température pour tenir compte de la différence d'altitude entre la station de mesure et le lieu de la fonte ( $^\circ C \times jours$ ),  
 $S$  est la fraction du bassin couverte par la neige,  
 $P$  est la hauteur des précipitations contribuant à l'écoulement ( $cm$ ),  
 $A$  est la superficie du bassin ( $m^2$ ),  
 $0,01/86400$  est le facteur de conversion d'unités de  $cm \cdot m^2/j$  à  $m^3/s$ .  
 $x$  et  $y$  sont des paramètres intervenant dans l'équation de récession.

Pour appliquer l'équation (8.28) dans les meilleures conditions, le bassin versant doit être subdivisé en plusieurs zones de différentes élévations, selon sa taille. Le ruissellement est calculé pour chaque zone. Le débit est alors calculé par sommation en utilisant le coefficient de récession, comme l'indique l'équation (8.29) :

$$Q_{n+1} = \sum_{i=1}^m [C_{sn_i} \alpha_{n_i} (T_{n_i} + \Delta T_{n_i}) S_{n_i} + C_{m_i} P_{n_i}] \frac{A_i}{864 \cdot 10^5} \cdot (1 - xQ_n^{-y}) + Q_n^{1-y} \quad (8.29)$$

Où  $Q_m$  est le nombre de zones qui constituent le bassin versant.

Les variables mesurées en temps réel sont la température, les précipitations et la fraction du bassin couverte de neige. Les paramètres à déterminer sont  $C_{sn}$ ,  $C_m$ ,  $\alpha$ ,  $x$  et  $y$ .

Pour alléger l'écriture, on se réfère dans la partie théorique à l'équation (8.28) même si c'est l'équation (8.29) qui est utilisée en pratique.

#### 8.6.3.3 Détermination du facteur de fonte

Le facteur de fonte  $\alpha$  peut être calculé à l'aide de la relation (8.25) utilisée dans l'équation des degrés-jours.

#### 8.6.3.4 Détermination des coefficients d'écoulement $C_{sn}$ et $C_m$

Ces coefficients expriment les rapports entre les volumes d'eau disponibles (pluie et fonte) et les volumes d'eau qu'on retrouve quelques heures plus tard dans le cours d'eau. Au début de la période de fonte, les pertes sont faibles car elles se limitent à l'évaporation. Les deux coefficients sont voisins de 1 pour des sols peu perméables et situés en hauteur. Plus tard, en présence de végétation, les pertes deviennent plus importantes en raison de l'évapotranspiration et de l'interception.

En général, les inondations surviennent en des moments où le sol est saturé. De plus, durant les deux mois de fonte, généralement mars et avril, il n'y a presque pas de végétation. On peut considérer à toute fin pratique les deux coefficients égaux à l'unité. Cette hypothèse doit être jugée d'après les résultats obtenus et peut être modifiée au besoin.

#### 8.6.3.5 Détermination de l'équation de récession

En hydrologie, la récession est reliée au déclin du débit dans le cours d'eau durant une période où les apports par ruissellement et fonte sont nuls. On écrit :

$$k = \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \quad (8.30)$$

où  $n, n+1$  est la séquence de jours durant la période de récession.

Le coefficient de récession cherché a la forme :

$$k_{n+1} = x Q_n^{-y} \quad (8.31)$$

L'équation de récession peut s'écrire :

$$Q_n = x^{1/y} \left( \frac{Q_0}{x^{1/y}} \right)^{(1-y)^n} \quad (8.32)$$

Cette équation est plus exacte que l'équation classique fréquemment utilisée :

$$Q_n = Q_0 e^{-na} \quad (8.33)$$

Les constantes  $x$  et  $y$  sont propres à chaque bassin. Il arrive souvent qu'un bassin versant possède très peu de données ou soit carrément non jaugé. Martinec (1986) propose une équation pour déterminer le coefficient de récession d'un tel bassin, connaissant celui d'un bassin versant voisin :

$$k_{N_n} = \left[ \left( \frac{\overline{Q_M}}{\overline{Q_N}} \cdot Q_{N_{n-1}} \right)^{y_M} \right]^{(A_M/A_N)^{1/4}} \quad (8.34)$$

- où
- M désigne le bassin documenté,
  - N désigne le bassin non documenté,
  - $x_M$  et  $y_M$  sont les constantes connues pour le bassin versant M,
  - $\overline{Q_M}$  et  $\overline{Q_N}$  sont les débits moyens durant les périodes de récession pour les bassins M et N,
  - $A_M$  et  $A_N$  sont les superficies respectives des deux bassins.

#### 8.6.3.6 Détermination de la température critique

Cette température détermine la nature des précipitations enregistrées. Contrairement aux précipitations pluvieuses, les précipitations neigeuses contribuent à la formation du couvert neigeux et ne participent pas au ruissellement immédiat du bassin.

Comme le font remarquer Charbonneau *et al.* (1981), la température critique est généralement supérieure à 0°C. Elle se situe entre 0°C et 3°C. La température critique est une caractéristique de la région étudiée. Bagchi (1983) utilise un autre critère pour déterminer la nature solide ou liquide des précipitations, soit la température minimale journalière  $T_{\min}$ . Si  $T_{\min} \geq 3,5^\circ\text{C}$  les précipitations sont



pluvieuses et si  $T_{\min} \leq -7,5^{\circ}\text{C}$  les précipitations sont neigeuses. Entre ces deux limites, il propose la relation :

$$x = 9 \cdot (3,5 - T_{\min}) \quad (8.35)$$

où  $x$  est le pourcentage des précipitations neigeuses.

Une température critique arbitraire de  $T_{\text{crit}} = 0^{\circ}\text{C}$  est utilisée normalement dans les applications.

#### 8.6.3.7 Extrapolation spatiale de la température

La température n'est pas uniforme sur un bassin : elle diminue généralement avec l'altitude suivant un taux de  $0,6^{\circ}\text{C}$  à  $0,9^{\circ}\text{C}$  par 100m. Ainsi le bassin versant est subdivisé en plusieurs zones selon les critères suivants : pente, exposition, élévation, nature du sol et végétation. Le modèle de fonte est ensuite appliqué séparément sur chaque zone. La sommation des débits fournis par chacune des zones fournit le débit total selon l'équation (8.29).

#### 8.6.3.8 Détermination des entrées du modèle

L'équation (8.28) est utilisée lorsque le retard entre le cycle des températures et des précipitations, d'une part, et les débits, d'autre part, est approximativement 18 heures. Dans ce cas, le débit du jour  $n+1$  est entièrement expliqué par la température et les précipitations du jour  $n$ . Selon les caractéristiques du bassin étudié, le retard  $L$  entre les entrées du modèle et le débit de sortie est variable. Ce retard peut être déterminé par l'examen des cycles de température et du débit des enregistrements passés. Safer *et al.* (1981) ont présenté une procédure particulière pour le choix des entrées du modèle selon la valeur du retard  $L$ . On désigne par  $I_n$  les entrées du modèle (précipitations et température) au jour  $n$  et par  $Q_n$  le débit à l'exutoire au jour  $n$ . La procédure est la suivante :

$L = 6\text{heures}$	$0,5I_n + 0,5I_{n+1}$	$\rightarrow$	$Q_{n+1}$
$L = 12\text{heures}$	$0,75I_n + 0,25I_{n+1}$	$\rightarrow$	$Q_{n+1}$
$L = 18\text{heures}$	$I_n$	$\rightarrow$	$Q_{n+1}$
$L = 24\text{heures}$	$0,25I_n + 0,75I_{n+1}$	$\rightarrow$	$Q_{n+2}$

Cette procédure possède l'avantage d'automatiser le choix des entrées du modèle. En effet, il est difficile d'étudier tous les épisodes de crue au moment de l'étalonnage du modèle pour déterminer les intrants du modèle. D'un autre côté, pour une crue isolée, connaissant le retard  $L$ , il est facile de juger si la crue a été provoquée par les précipitations du jour  $n$ , du jour  $n+1$  ou par les deux.

#### 8.6.3.9 Détermination de la fraction du bassin versant couverte par la neige

La détermination de la fraction du bassin couverte de neige  $S$  est une étape critique dans l'application des modèles de fonte. Tout d'abord, parce que la précision des résultats en dépend fortement. D'un autre côté, la répartition spatiale de la couverture de neige est généralement hétérogène. Le couvert forestier modifie le climat local (direction et vitesse du vent, absorption de la radiation, variation de la température) si bien que les accumulations de neige sont plus importantes en forêt qu'en terrain déboisé. Il serait illusoire, dans l'état actuel des choses, de penser pouvoir inclure dans un modèle de fonte tous les paramètres qui touchent de près ou de loin la répartition spatiale et l'épaisseur du couvert de neige. Durant les périodes critiques où il y a risque d'inondation, des images de télédétection peuvent être d'un grand secours pour la détermination précise de la fraction d'un bassin couverte de neige. L'application de la télédétection à la détermination de la fraction du bassin versant couverte par la neige a été traitée par Rango et Martinec (1979-1980).

Il y a des inconvénients dans l'utilisation des images des satellites. Tout d'abord, le prix est élevé, à plus forte raison quand les commandes doivent être programmées à l'avance et ne peuvent pas être effectuées seulement dans des périodes critiques lorsqu'on prévoit un danger de crue. De plus, en présence de couverture nuageuse, comme c'est souvent le cas dans certaines régions, les images peuvent être complètement erronées à cause de la confusion entre neige et nuage. Enfin, il n'y a pas d'images disponibles pour les événements antérieurs qui servent à étalonner le modèle.

Il est par conséquent nécessaire de recourir à une répartition théorique du couvert de neige sur un bassin. Malgré la complexité du problème, on opte pour un modèle simple qui ne fait pas appel à beaucoup de données. En fait, les seules données nécessaires sont les hauteurs maximale  $H_{\text{MAX}}^I$  et minimale  $H_{\text{MIN}}^I$  du manteau nival au début de la période d'intérêt. Les chutes de neige qui peuvent survenir par la suite sont cumulées uniformément sur l'ensemble du bassin pour obtenir les hauteurs finales  $H_{\text{MAX}}^F$  et  $H_{\text{MIN}}^F$  (figure 8.12).

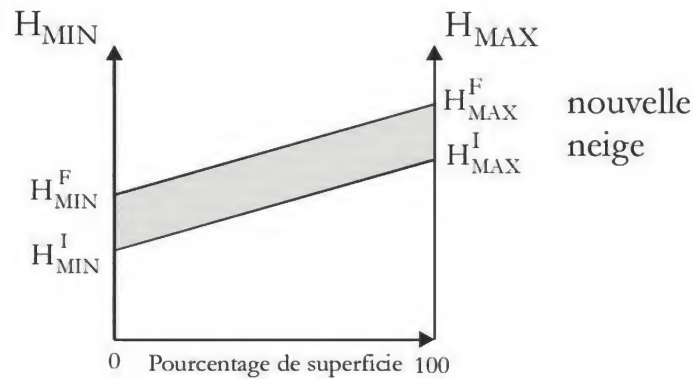


Fig. 8.12 Évolution du manteau nival (accumulation)

Parallèlement, les hauteurs maximale et minimale sont calculées chaque jour pour tenir compte d'une fonte éventuelle (figure 8.13).

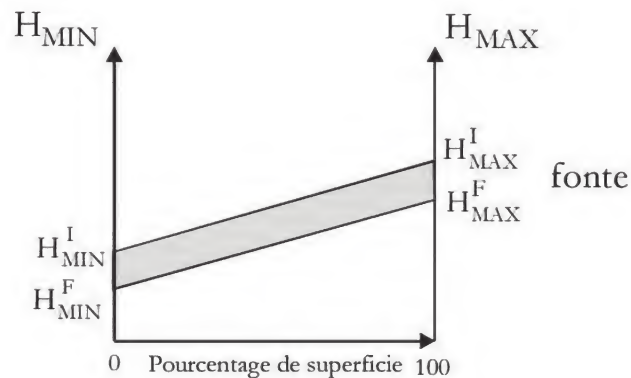


Fig. 8.13 Évolution du manteau nival (fonte)

Pour déterminer la fraction du bassin couverte de neige, quand la hauteur  $H_{\text{MIN}}$  devient nulle, on exprime tout simplement que les droites du manteau nival restent parallèles entre elles (figure 8.14) en écrivant :

$$\frac{H_{\text{MAX}}^I - H_{\text{MIN}}^I}{1} = \frac{H_M - FT}{S} \quad (8.36)$$



On obtient de (8.36) :

$$S = \frac{H_M - FT}{H_{MAX}^I - H_{MIN}^I} \quad (8.37)$$

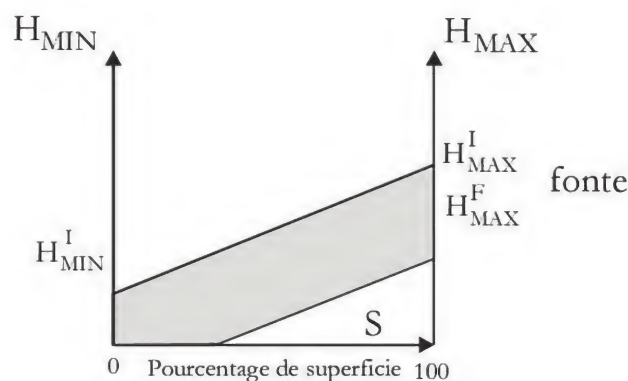


Fig. 8.14 Calcul de la fraction S

#### 8.6.4 Critère de validité du modèle

Aucun modèle mathématique ne réussit à prédire exactement les débits observés dans une rivière. Afin de juger de l'adéquation d'un modèle donné à reproduire les débits observés, on utilise certains critères de performance. Le critère le plus simple et le plus commun est le coefficient de Nash :

$$\text{Nash} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Q_i - Q_i')^2}{\sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2} \quad (8.38)$$

- où  $Q_i$  est le débit mesuré le jour  $i$ ,  
 $Q_i'$  est le débit calculé le jour  $i$ ,  
 $\bar{Q}$  est la moyenne des débits mesurés durant la période simulée,  
 $N$  est le nombre de jours considérés.

Plus le coefficient de Nash est proche de l'unité, plus le modèle est jugé approprié pour simuler les débits observés.

Un autre critère de performance du modèle est défini par le coefficient :

$$D_v = \frac{V_R - V_R'}{V_R} \cdot 100\% \quad (8.39)$$

- où  $D_v$  est la différence, en pourcentage, entre les volumes mesuré et calculé,  
 $V_R$  est le volume mesuré,  
 $V_R'$  est le volume calculé.

## RÉSUMÉ

- 1- Le débit de base dans un cours d'eau peut être estimé par la relation :

$$Q_{\text{base}}(t) = Q_0 e^{-at}$$

- 2- Dans une conduite d'égout combiné, le débit de base est constitué des eaux usées domestiques, commerciales et industrielles majorées par les eaux d'infiltration.

- 3- La courbe de tarage qui relie le niveau au débit dans une section de contrôle d'un cours d'eau se présente sous la forme suivante :

$$Q = a(h + h_0)^n$$

- 4- La méthode rationnelle permet de déterminer le débit de pointe à l'exutoire d'un bassin versant de petite surface par la relation :

$$Q = 0,0028 CIA$$

où  $I$  est l'intensité de la pluie de projet de durée égale au temps de concentration  $t_c$  du bassin (voir les formules 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12).

- 5- L'hydrogramme unitaire permet de calculer la variation du débit à l'exutoire d'un bassin versant à l'aide de l'équation de convolution :

$$Q_n = \sum_{K=1}^n i_K U_{n+1-K}$$

- 6- En l'absence de mesures de débit, on peut utiliser un hydrogramme unitaire synthétique du type SCS. Cet hydrogramme triangulaire est caractérisé par son débit de pointe  $Q_p = 0,208A/T_M$  où  $A$  est la superficie en  $\text{km}^2$  et le temps de montée est  $T_M = 0,67T_C = (3/8)T_B$  en heures.

- 7- La fonte des neiges  $M$  peut être estimée par le modèle de degrés-jours :

$$M = \alpha (T - C)$$

## EXERCICES

### Exercice 8.1

L'hydrogramme de ruissellement mesuré à l'exutoire d'un bassin versant est donné par le tableau suivant :

Temps (jours)	0	1	2	3	4	5	6	7
Q (m <sup>3</sup> /s)	35	31,4	34,3	250	140	89,6	57,4	43
Temps (jours)	8	9	10	11	12	13	14	15
Q (m <sup>3</sup> /s)	37,3	36,9	35,7	35,1	34,9	34,8	34,7	34,6

Il faut séparer l'écoulement de base du ruissellement de surface à l'aide de deux méthodes.

### Exercice 8.2

Le temps de concentration d'un bassin urbain de forme rectangulaire est  $t_c = 20$  minutes. On considère trois scénarios d'orages :

- 1- 60mm/h durant 15 minutes
- 2- 50mm/h durant 20 minutes
- 3- 40mm/h durant 25 minutes

Parmi les trois scénarios, lequel génère

- 1) le débit de pointe le plus élevé ?
- 2) le volume de ruissellement le plus élevé?

### Exercice 8.3

Les débits de l'hydrogramme d'une crue sont donnés au tableau ci-dessous pour un bassin de 600 acres. Cette crue a été produite par une précipitation uniforme de 2,75 pouces par heure qui a commencé à neuf heures et a cessé soudainement à onze heures. Cette pluie a généré un ruissellement direct de 5,0 pouces. L'écoulement de base était en tout temps de 100pi<sup>3</sup>/s.

Il faut déterminer :

- a) l'heure à laquelle a commencé et cessé le ruissellement direct,
- b) l'indice  $\phi$  du bassin versant,
- c) l'hydrogramme unitaire de 2 heures (HU<sub>2</sub>),
- d) le temps de concentration,
- e) l'heure à laquelle aurait cessé le ruissellement direct si une averse de 2,75po/h, d'une durée de 8h avait commencé à 9h,
- f) le débit de pointe et le ruissellement direct de cette pluie décrite en e).

Temps (h)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Débit (pi <sup>3</sup> /s)	100	100	300	500	700	800	600	400	300	200	100



### Exercice 8.4

Un bassin versant qui a une superficie totale de  $A = 50$  hectares, a un temps de concentration de  $t_c = 20$  minutes. La courbe IDF une fois dans cinq ans pour ce bassin est  $i = 2228/(t + 13)$ . Le coefficient de ruissellement est  $C = 0,6$ . Il faut calculer :

- 1) le débit de projet à l'exutoire de ce bassin,
- 2) le débit 5 minutes après le début de la pluie de projet,
- 3) le débit 15 minutes après le début de la pluie de projet,
- 4) le débit 42 minutes après le début de la pluie de projet,
- 5) le débit maximum si l'on prend une pluie de projet d'une durée de 15 minutes,
- 6) le débit 5 minutes après le début de la pluie considérée en 5),
- 7) le débit 25 minutes après le début de la pluie considérée en 5),
- 8) le débit 40 minutes après le début de la pluie considérée en 5),
- 9) le débit maximum si l'on prend une pluie de projet d'une durée de 25 minutes,
- 10) le débit 20 minutes après le début de la pluie considérée en 9),
- 11) le débit 25 minutes après le début de la pluie considérée en 9),
- 12) le débit 45 minutes après le début de la pluie considérée en 9).

### Exercice 8.5

Le but de cet exercice est de démontrer l'effet de l'urbanisation sur l'augmentation des débits de ruissellement et par conséquent sur les inondations.

Avant urbanisation, un bassin de drainage d'une superficie de  $5\text{km}^2$  est complètement recouvert d'une forêt ( $C = 0,3$ ). La pente représentative du bassin est de  $2,5\%$  et la longueur maximum du parcours entre le point le plus éloigné de l'exutoire et l'embouchure du bassin est  $L = 3,25\text{km}$ . Un ingénieur a calculé le diamètre d'un ponceau en béton ( $n = 0,014$ ) de section circulaire pour

drainer ce bassin pour une pluie décennale dont l'intensité en  $\text{mm/h}$  est donnée par  $I = \frac{2743}{t + 14}$ ,  $t$  étant en minutes.

Le ponceau a une longueur de  $20\text{m}$  et est installé avec une pente de  $1\%$ . Il doit couler plein, sans se mettre en charge, pour le débit de design. Pour calculer le temps de concentration en minutes,

l'ingénieur a utilisé la formule  $t_c = 3,26(1,1 - C) \frac{\sqrt{L}}{S^{\frac{1}{3}}}$ , où  $C$  est le coefficient de ruissellement,  $L$

est la longueur de parcours hydraulique en mètres et  $S$  est la pente du bassin en  $\%$ .

Après un développement où les surfaces pavées et asphaltées ( $C = 0,9$ ) représentent maintenant  $50\%$  du bassin total et les surfaces gazonnées ( $C = 0,3$ ) représentent  $50\%$ , on a constaté que le ponceau n'était plus adéquat, se mettait en charge et inondait la route. Il faut expliquer ce phénomène numériquement en supposant que la profondeur à la sortie du ponceau est égale au diamètre du ponceau.

**Exercice 8.6**

Un bassin de drainage possède un hydrogramme triangulaire unitaire synthétique de une (1) heure dont le temps de base est  $T_B = 6$  heures. Le temps de montée est  $T_M = 2$  heures. Le débit de pointe de l'hydrogramme unitaire est  $Q_p = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ .

- 1° Calculer l'aire du bassin
- 2° Calculer l'hydrogramme de ruissellement correspondant à une pluie de durée quatre (4) heures dont les intensités nettes respectives sont  $i_1 = 25 \text{ mm/h}$ ,  $i_2 = 0$ ,  $i_3 = 75 \text{ mm/h}$ ,  $i_4 = 25 \text{ mm/h}$ .
- 3° Quelle est la durée du ruissellement.

**Exercice 8.7**

Un bassin versant situé dans la région de Montréal a une superficie de  $A = 20$  hectares et un coefficient de ruissellement de  $C = 0,5$ . Le débit de projet une fois dans cinq ans est  $Q_5 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Il faut trouver le temps de concentration de ce bassin.

**Exercice 8.8**

Le temps de concentration d'un bassin urbain de superficie  $A = 100$  hectares situé dans la région de Montréal est de  $t_c = 25$  minutes. Le coefficient de ruissellement pondéré pour l'ensemble du bassin est  $C = 0,5$ . La partie imperméable de ce bassin a une superficie de 40 hectares et un temps de concentration de  $t_c = 7$  minutes. Le coefficient de ruissellement pour la partie imperméable est  $C = 0,9$ .

Il faut calculer le débit maximal pour ce bassin pour la pluie de projet 1/5 ans.

**Exercice 8.9**

Il faut expliquer, à l'aide d'un graphe, la différence entre un hydrogramme unitaire d'une heure et un hydrogramme unitaire de trois heures pour un même bassin versant, en particulier quant au débit de pointe et quant à l'heure de la pointe.

**Exercice 8.10**

Il faut trouver la superficie du bassin ayant l'hydrogramme unitaire suivant :

Temps (h)	0	1	2	3	4	5	6
Débit ( $\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}$ )	0	2,5	1,4	0,85	0,55	0,28	0

**Exercice 8.11**

À la suite d'une précipitation d'intensité constante qui a duré 1,0 heure, on a mesuré l'hydrogramme de ruissellement (donné au tableau ci-dessous) à l'exutoire d'un bassin de drainage d'une superficie de 4500ha.

Il faut déterminer l'hydrogramme unitaire de 1 heure et de 2 heures pour ce bassin.

Temps (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Débit (m <sup>3</sup> /s)	0	19,5	45,0	30,0	22,5	17,0	12,5	8,5	5,0	3,5	1,5	0	0	0

**Exercice 8.12**

Les ordonnées d'un hydrogramme unitaire d'un bassin de drainage obtenues pour une pluie d'une heure et définies avec un pas horaire sont présentées au tableau ci-après :

t (heures)	0	1	2	3	4	5
q (m <sup>3</sup> /s/cm)	0	3,2	4,3	1,6	0,6	0

- 1) Il faut déterminer la superficie (km<sup>2</sup>) du bassin de drainage et l'hydrogramme unitaire de deux heures en expliquant la démarche.
- 2) Il faut déterminer le débit de ruissellement pour une pluie de huit heures dont l'intensité nette est de 0,6cm/h durant les deux premières heures, de 0,3cm/h durant les troisième et quatrième heures et de 0,5cm/h durant les quatre dernières heures.  
Quelle est la durée du ruissellement direct de cette pluie?

**Exercice 8.13**

Le ruissellement à la suite d'une pluie qui a duré une heure et qui a accumulé une lame nette de 1,0 cm sur un bassin de drainage, est représenté par l'hydrogramme suivant :

t (heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q (m <sup>3</sup> /s)	20	100	200	420	520	440	320	250	200

t (heures)	9	10	11	12	13	14	15
Q (m <sup>3</sup> /s)	150	100	70	40	30	30	30

- 1) Il faut trouver l'hydrogramme unitaire d'une heure.
- 2) Il faut trouver l'hydrogramme unitaire de deux heures.
- 3) Il faut comparer les volumes de ruissellement générés par ces deux hydrogrammes et leurs débits de pointe.
- 4) Environnement Canada prévoit l'accumulation d'une lame de 40mm sur une période de 2 heures, suivie d'une accumulation de 80mm sur une période de 4 heures. Si l'indice  $\phi$  pour ce bassin est  $\phi = 15\text{mm/h}$ , quel est l'hydrogramme prévu?



## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 8

- Bagchi, A.K. (1983), «Generation of the Snowline», *American Society of Photogrammetry*, vol. 9, n° 12, p. 1679-1689.
- Bennis, S. (1987), *Techniques de prévision des crues par l'analyse des séries temporelles*, Thèse de doctorat, Génie civil, Université de Sherbrooke, Québec, Canada.
- Bennis, S. et Brunelle, P.E. (1991), «Modèles d'évolution du manteau nival et de la fonte des neiges», *Revue canadienne de génie civil*, vol. 15, octobre.
- Bray, D.E. (1965), *Snowmelt-Stream Forecasting for the Tobique River N.B.*, Master's Thesis, Dept. of Civil Engineering, Fredericton, University of New Brunswick.
- Charbonneau, R., Lardeau, J.P. et Obled, C. (1981), «Problems of Modelling a High Mountain Drainage Basin with Predominant Snow Yields», *Hydrol. Science Bulletin*, vol. 26, n° 4, p. 345-361.
- Grisollet, H. (1948), «Étude des averses orageuses de la région parisienne», *La météorologie*, vol. 4, n° 11, p. 175-195
- Huber, W.C. et Dickinson, R.E. (1988), *Storm Water Management Model Users' Manual*, Athens (GA), U.S. Environmental Protection Agency.
- Keiffer, J. et Chu, H.H. (1957), «Synthetic Storm Pattern for Drainage Design», *J. of Hydraulic Division*, proc. ASCE, vol. 93, p. 1-25.
- Kirpich, Z.P. (1940), «Time of Concentration of Small Agricultural Watersheds», *Civil Engineering*, vol. 10, n° 6.
- Federal Aviation Agency (1970), *Advisory Circular on Airport Drainage*, Rap. A/C 150-5320-5B, Washington, D.C.
- Llamas, J. (1993), *Hydrologie générale – principes et applications*, 2<sup>e</sup> éd., Montréal, Gaëtan Morin éditeur.
- Martinec, J. (1960), «The Degree-Day Factor for Snowmelt Runoff Forecasting», *LAHS Publication*, n° 51, IUGG General Assembly of Helsinki, IAHS Commission of Surface Waters, p. 468-477.
- Martinec, J. et Rango, A. (1986), «Parameter Values for Snowmelt Runoff Modelling», *J. Hydrology*, vol. 84, p. 197-219.

Martinec, J., Rango, A. et Major, E. (1983), *Snowmelt-Runoff Model SRM User's Manual*, Washington, D.C., Naso Ref. Publication 1100, 118 p.

Mitci C. (1974), «Nouvelles courbes de pluie et orage type pour la région de Montréal», *Eau du Québec*, vol. 7, n° 1, p. 37-44.

Rango, A. (1980), «Remote Sensing of Snow Covered Area for Runoff Modelling in Hydrological Forecasting, *Proc. of the Oxford Symposium*, IASH Publ. n° 189, p. 291-197.

Rango, A. et Martinec, J. (1979), «Application of a Snowmelt-Runoff Model Using Landsat Data», *NORO Hydrological*, p. 225-238.

Soil Conservation Service (1972), *National Engineering Handbook*, Sec. 4, Hydrology, U Washington, D.C., S. Department of Agriculture.

Pysklywec, D.W. et Davar, K.S. (1968), «Snowmelt at an Index Plot», *Water Resources Research*, vol. 4, n° 5, p. 937-946.

Safer, B.A., Jones, E.B. et Frick, D.M. (1981), *Snowmelt-Runoff Simulation Using the Martinec-Rango Model on the South Fork Rio, Grande and Conejos River in Colorado*, Agristars Rep. CP. G10, N. 72, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 48 p.

U. S. Army Corps of Engineers (1956), *Snow Hydrology : Summary Report of Snow Investigations*, Portland (OR), North Pacific Division.

Viessman, Wand et Lewis, G. (1996), *Introduction to Hydrology*, Londres, Harper Collins, p. 163

## SYMBOLES DU CHAPITRE 8

$a$	: constante de cours d'eau	$n$	: constante de cours d'eau, coefficient de Manning
$A$	: superficie d'un bassin versant, constante	$N$	: nombre de jours
$A_i$	: superficie (zone $i$ d'un bassin)	$P$	: pluie, hauteur des précipitations
$B$	: constante	$Q$	: débit
$C$	: coefficient de ruissellement, constante, température de fonte	$Q'$	: débit calculé
$C_m$	: coeff. de ruissellement (pluie)	$Q_{base}$	: débit de base
$C_{sn}$	: coeff. de ruissellement (fonte)	$Q_0$	: débit initial
$d$	: profondeur d'eau	$Q_p$	: débit de pointe
$d_p$	: profondeur de stockage	$R_b$	: rayonnement à ondes longues
$D_v$	: différence entre volumes mesuré et calculé	$S$	: pente moyenne, fraction de bassin enneigée
$E$	: ensoleillement	$t$	: temps
$f$	: humidité relative	$t_c$	: temps de concentration
$g$	: accélération due à la gravité	$T$	: période de retour, température moyenne, nombre de degrés-jours
$h$	: profondeur d'écoulement	$T_{crit}$	: température critique
$h_0$	: correction de profondeur	$T_{min}$	: température minimum
$HU$	: hydrogramme unitaire	$T_M$	: temps de montée
$i$	: intensité des précipitations	$U$	: ordonnée de l'hydrogramme unitaire
$i^*$	: intensité des précipitations nettes	$v$	: volume d'eau dans un bassin
$I$	: intensité des précipitations	$V$	: vitesse du vent
$k$	: coefficient de récession	$V_R$	: volume mesuré
$K$	: facteur de conversion	$V_R'$	: volume calculé
$K_L$	: coeff. de longueur de parcours	$W$	: largeur de bassin versant
$L$	: longueur de parcours, « Lag »	$x$	: paramètre, fraction neigeuse
$m$	: nombre de zones d'un bassin versant	$y$	: paramètre
$M$	: taux de fonte des neiges	$\alpha$	: facteur de fonte
		$\rho_s$	: masse volumique de la neige
		$\rho_w$	: masse volumique de l'eau





# Chapitre 9

## *Laminage des crues*

### Objectifs

- 1- Comprendre les phénomènes de laminage naturel et artificiel.
- 2- Calculer l'hydrogramme laminé en aval d'un tronçon de rivière, connaissant l'hydrogramme mesuré ou prévu en amont.
- 3- Calculer l'hydrogramme laminé à la sortie d'un réservoir, connaissant l'hydrogramme d'entrée.

## 9.1 Introduction

On a vu dans le chapitre 8 comment calculer l'hydrogramme de ruissellement à l'exutoire à partir des précipitations prévues ou tombées. Cet hydrogramme, que l'on connaît maintenant, constitue une donnée de base pour effectuer les calculs dans le présent chapitre. On cherche à déterminer comment se transforme la courbe de cet hydrogramme au fur et à mesure que la crue se propage de l'amont vers l'aval dans un réservoir ou dans un tronçon de rivière.

## 9.2 Définition

On appelle *laminage* d'une crue la réduction du débit de pointe de son hydrogramme par des moyens naturels ou artificiels. Le laminage naturel a lieu le long du tronçon de rivière. Les forces de frottement du fond du canal et des berges causent une réduction de la pointe de l'hydrogramme (fig. 9.1).

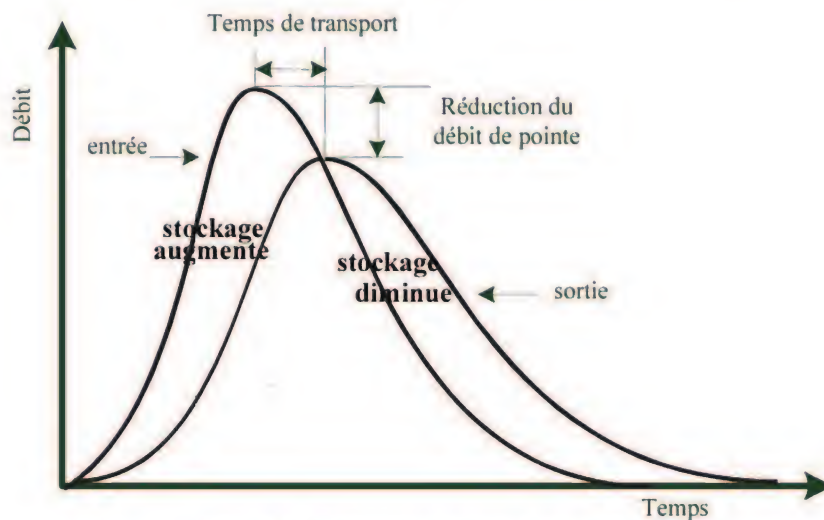


Fig. 9.1 Laminage naturel et artificiel

Le laminage artificiel se fait à travers un réservoir. Lorsqu'une onde de crue entre dans un réservoir muni d'un système de vidange, le débit sortant produit un hydrogramme ayant une pointe décalée dans le temps et plus faible que celle de l'hydrogramme d'entrée (figure 9.1)

On voit ainsi que l'utilité d'un réservoir est double. En milieu rural, un réservoir permet de stocker l'eau en période d'abondance durant la crue printanière pour l'utiliser en période d'étiage, tout en permettant d'atténuer ou d'éviter l'effet dévastateur des inondations en aval du réservoir.



En milieu urbain, les bassins de rétention jouent sensiblement le même rôle avec un gain supplémentaire pour l'environnement. Ces bassins retiennent les eaux en temps de pluie et les restituent soit au milieu naturel après décantation dans le cas des réseaux pluviaux, soit à la station d'épuration dans les réseaux unitaires. Dans les deux cas, la réduction du débit de pointe joue un rôle important pour contrer les inondations et permettre aux ouvrages de dépollution de fonctionner adéquatement. De plus en plus, ces bassins sont intégrés dans l'environnement et jouent un rôle important dans l'aménagement paysager et la récréation.

### 9.3 Laminage d'une onde de crue dans un tronçon de rivière

#### 9.3.1 Équations du mouvement

Le mouvement de l'eau durant une période de crue dans un tronçon de rivière ou d'égout obéit aux équations de Saint-Venant. Ces équations traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement le long d'un tronçon orienté selon la direction principale d'écoulement  $x$ .

L'équation de la quantité de mouvement se présente comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right)}_{(2)} + \underbrace{gA \frac{\partial y}{\partial x}}_{(3)} = \underbrace{gA(S_0 - S_f)}_{(4)} + \underbrace{q \frac{Q}{A}}_{(5)} \quad (9.1)$$

L'équation de continuité ou de conservation de la masse est la suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (9.2)$$

En plus des notations habituelles,  $q$  désigne dans ces équations le débit latéral par unité de longueur du tronçon de rivière, débit qui entre dans le tronçon ou en sort.

La signification des cinq termes de l'équation (9.1) est la suivante :

- Le terme (1) représente l'accélération temporelle locale. Plus précisément, il rend compte de la vitesse de la variation du débit durant la crue. À titre d'exemple, si le débit de crue augmente de  $1\text{m}^3/\text{s}$  à  $2\text{m}^3/\text{s}$  en une heure, ce terme vaut  $(2\text{m}^3/\text{s} - 1\text{m}^3/\text{s})/3600\text{s} = 0,000277\text{m}^3/\text{s}^2$ . L'importance relative

de ce terme, qui en l'occurrence est faible, doit être comparée avec celle des autres termes apparaissant dans l'équation.

- Le terme (2) représente l'accélération convective qui peut exister quand il y a un changement dans la géométrie (élargissement, rétrécissement). En absence de changement de section ce terme peut être négligé.
- Le terme (3) traduit le bilan des forces de pression dues au changement de la profondeur  $y$  avec l'abscisse  $x$ .
- Le terme (4) exprime les forces de gravité ( $S_0$ ) et les forces de frottement ( $S_f$ ).
- Le terme (5) exprime l'apport ou la perte de la quantité du mouvement dus à un apport ou une perte d'eau sur le côté latéral.

La résolution des équations (9.1) et (9.2) est faisable mais pose parfois des difficultés d'ordre pratique et numérique (Cunge et Wegner, 1964). On a ainsi souvent cherché à simplifier ce système selon les applications et les contextes.

D'après plusieurs études (Cunge *et al.*, 1980), les trois premiers termes de l'équation (9.1) peuvent être négligés pour la plupart des crues dans les rivières, si bien que l'équation (9.1) devient en l'absence d'apport de débit latéral :

$$S_f = S_0 \quad (9.3)$$

L'équation de continuité (9.2) peut être mise sous la forme suivante utilisée dans le chapitre 1:

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (9.4)$$

où  $I$  ( INPUT ou Inflow ) désigne le débit d'entrée  $Q_E$ ,  
 $O$  ( OUTPUT ou Outflow ) désigne le débit de sortie  $Q_S$ ,  
 $S$  désigne l'emmagasinement d'eau dans le tronçon.

L'équation (9.4) exprime tout simplement le principe de conservation de la masse traité dans le chapitre 1 : le taux de variation de l'emmagasinement est égal à la différence entre les débits entrant et sortant.

### 9.3.2 Méthode de Muskingum

Après intégration entre deux instants assez rapprochés  $t_1$  et  $t_2$ , l'équation (9.4) s'écrit :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} I dt - \int_{t_1}^{t_2} O dt \quad (9.5)$$

Pour un petit intervalle de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ , on peut écrire :



$$S_2 - S_1 = \left( \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{O_1 + O_2}{2} \right) \Delta t \quad (9.6)$$

La résolution du problème consiste à déterminer  $O_1$  et  $O_2$ , connaissant  $I_1$  et  $I_2$ . L'équation (9.6) ne peut être utile que si l'on dispose d'une fonction d'emmagasinement pour déterminer  $S_1$  et  $S_2$ .

En période de crue dans le tronçon compris entre les sections 1 et 2 (figure 9.2), le débit d'entrée  $I$  est supérieur au débit de sortie  $O$ . Le stockage augmente comme montré sur la figure 9.2(a). En période de décrue, la situation inverse survient, comme montré sur la figure 9.2(b).

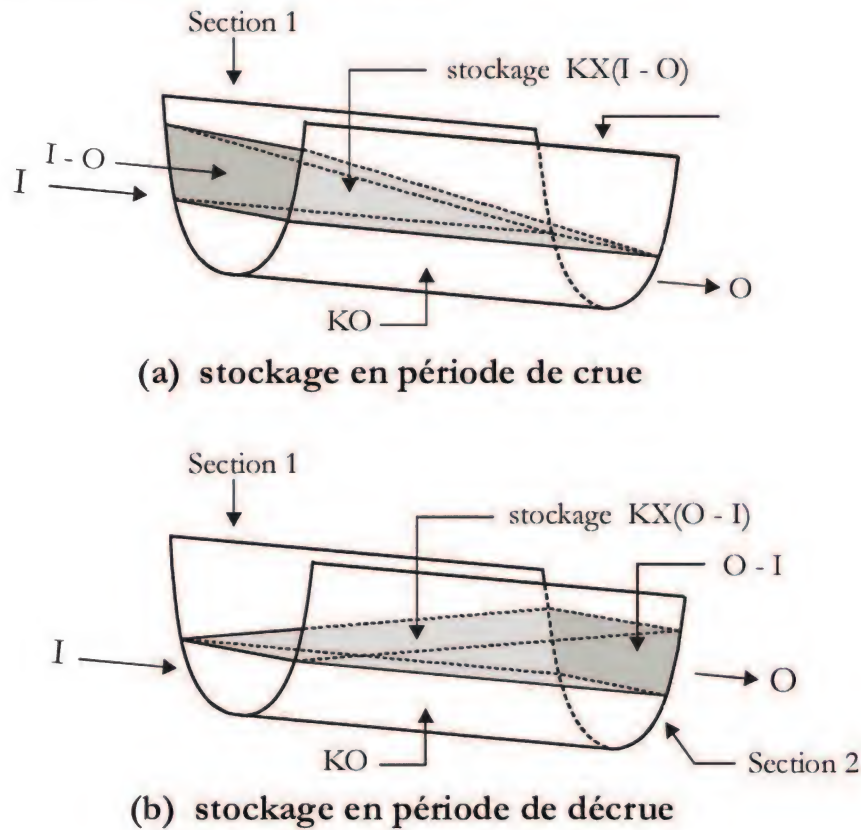


Fig. 9.2 Stockage en périodes de crue et de décrue

Le modèle de Muskingum consiste à supposer que le stockage est relié aux débits d'entrée et de sortie par la relation (9.7), tel qu'illustré sur les figures 9.2(a) et 9.2(b).

$$S = K \cdot O + K \cdot \chi \cdot (I - O) \quad (9.7)$$

Si l'on considère deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , l'équation (9.7) peut s'écrire :



$$S_2 - S_1 = K[\chi(I_2 - I_1) + (1 - \chi)(O_2 - O_1)] \quad (9.8)$$

Dans ces équations,  $K$  et  $\chi$  sont deux constantes caractéristiques propres à chaque tronçon de rivière.  $K$  et  $\Delta t$  doivent avoir la même unité.  $K$ , qui a donc l'unité de temps, est appelé *constante d'emmagasinement*. Par ailleurs,  $0 \leq \chi \leq 0,5$ .

Une méthode simple d'estimation de  $K$  consiste à la considérer égale au temps de décalage entre les débits de pointe à l'entrée et à la sortie. Comme les hydrogrammes d'entrée et de sortie peuvent avoir plusieurs pointes dont certaines peuvent être erronées, on utilise une définition plus élaborée. La constante  $K$  est considérée comme égale au décalage temporel entre les centroïdes de l'hydrogramme d'entrée et de sortie (Chocat, 1997). La valeur de  $K$  est alors calculée par la relation :

$$K = \frac{\int_0^{t_{\text{final}}} tO(t) dt}{\int_0^{t_{\text{final}}} O dt} - \frac{\int_0^{t_{\text{final}}} tI(t) dt}{\int_0^{t_{\text{final}}} I dt} \quad (9.9)$$

$\chi$  est une constante sans dimension comprise entre 0 et 0,5, la valeur la plus usuelle pour les rivières étant 0,2 (Chow *et al.*, 1988).

En substituant la relation (9.8) dans (9.6), cette dernière prend la forme :

$$O_2 = c_0 I_2 + c_1 I_1 + c_2 O_1 \quad (9.10)$$

avec

$$c_0 = \frac{-K\chi + 0,5\Delta t}{K(1 - \chi) + 0,5\Delta t} \quad (9.11)$$

$$c_1 = \frac{K\chi + 0,5\Delta t}{K(1 - \chi) + 0,5\Delta t} \quad (9.12)$$

$$c_2 = \frac{K(1 - \chi) - 0,5\Delta t}{K(1 - \chi) + 0,5\Delta t} \quad (9.13)$$

$$c_0 + c_1 + c_2 = 1 \quad (9.14)$$

Un des inconvénients de la méthode de Muskingum est de produire parfois des débits de sortie négatifs en début de crue.

L'examen de l'expression des coefficients  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  nous indique que l'intervalle de temps  $\Delta t$  doit satisfaire la condition  $2K\chi < \Delta t < 2K(1 - \chi)$  pour éviter que les coefficients soient négatifs. Par ailleurs,  $\Delta t$  doit être assez petit pour bien appréhender la pointe de la crue ainsi que sa montée.

### Détermination de $K$ et $\chi$ :

En combinant les équations (9.6) et (9.8), on peut mettre le paramètre  $K$  sous la forme :

$$K = \frac{0,5\Delta t[(I_1 + I_2) - (O_1 + O_2)]}{\chi(I_2 - I_1) + (1 - \chi)(O_2 - O_1)} = \frac{\text{Num}}{\text{Den}} \quad (9.15)$$

Pour déterminer  $\chi$  et  $K$  on procède par tâtonnement de la manière suivante : on choisit successivement pour  $\chi$  les valeurs 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 et 0,5. On trace pour chaque valeur de  $\chi$  la fonction  $\text{Num} = f(\text{Den})$  dont la pente est  $K$  (Figure 9.3). La valeur de  $\chi$  qui donne la boucle la plus proche d'une droite de pente constante égale à  $K$  est retenue.

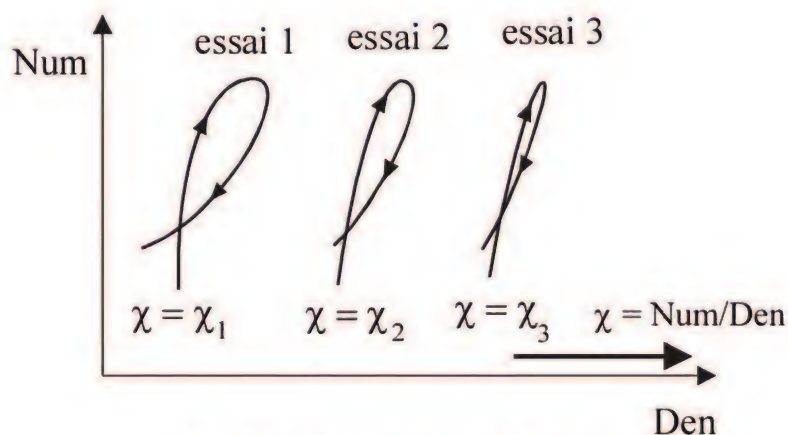


Fig. 9.3 Détermination de  $K$  et  $\chi$

### Application 9.1

L'hydrogramme d'entrée d'un tronçon de rivière est donné au tableau 9.1.

Heures	6	12	18	24	30	36	42	48
Entrée	100	300	680	500	400	310	230	100
Sortie	100							

Tableau 9.1 Hydrogramme d'entrée

Il faut déterminer l'hydrogramme de sortie 80km en aval, sachant que  $K = 11h$  et  $\chi = 0,13$ .

Par les équations (9.11) à (9.13), avec  $\Delta t = 6h$  :

$$c_0 = \frac{-11h \cdot 0,13 + 0,5 \cdot 6h}{11h \cdot (1 - 0,13) + 0,5 \cdot 6h} = 0,1249 \quad c_1 = \frac{11h \cdot 0,13 + 0,5 \cdot 6h}{11h \cdot (1 - 0,13) + 0,5 \cdot 6h} = 0,3524$$

$$c_2 = \frac{11h \cdot (1 - 0,13) - 0,5 \cdot 6h}{11h \cdot (1 - 0,13) + 0,5 \cdot 6h} = 0,5227$$

On vérifie par l'équation (9.14) :

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0,1249 + 0,3524 + 0,5227 = 1,0$$

On utilise ensuite l'équation (9.10) avec ces valeurs de  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  :

$$O_2 = 0,1249 \times I_2 + 0,3524 \times I_1 + 0,5227 \times O_1$$

On continue à calculer  $O_2$  jusqu'à ce que sa valeur devienne égale à celle de  $I_1$  (tableau 9.2). La crue est alors terminée et on revient à l'écoulement de base.

Jour	Heures	$I_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$c_0 I_2$ (m <sup>3</sup> /s)	$c_1 I_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$c_2 O_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$O_2$ (m <sup>3</sup> /s)
1	6	100	-	-	-	100
	12	300	37,5	35,2	52,3	125,0
	18	680	84,9	105,7	65,3	255,9
	24	500	62,5	239,6	133,8	435,9
2	6	400	50,0	176,2	227,8	454,0
	12	310	38,7	141,0	237,8	417,0
	18	230	28,7	109,2	218,0	355,9
	24	100	12,5	81,1	186,0	279,6
3	6	100	12,5	35,2	146,1	193,8
	12	100	12,5	35,2	101,3	149,0
	18	100	12,5	35,2	77,9	125,6
	24	100	12,5	35,2	65,7	113,4
4	6	100	12,5	35,2	59,3	107,0
	12	100	12,5	35,2	55,9	103,6
	18	100	12,5	35,2	54,2	101,9
	24	100	12,5	35,2	53,3	101,0
5	6	100	12,5	35,2	52,8	101,5
	12	100	12,5	35,2	52,5	101,2
	18	100	12,5	35,2	52,4	101,1
	24	100	12,5	35,2	52,3	100,0

Tableau 9.2



*Remarque importante*

La méthode de Muskingum exposée précédemment n'est plus applicable quand les pentes des conduites ou des cours d'eau sont raides ou trop faibles. Quand il y a des influences aval ou des mises en charge dans un réseau d'assainissement, les équations complètes de Saint-Venant deviennent incontournables.

**9.3.3 Méthode de Muskingum-Cunge**

La détermination des paramètres  $K$  et  $\chi$  nécessite la connaissance d'un hydrogramme d'entrée et de sortie dans le tronçon de rivière étudié.

Pour des rivières non jaugées, la méthode exposée précédemment n'est donc pas applicable. Cunge (1967) a proposé une méthode pour estimer  $K$  et  $\chi$  à partir des caractéristiques physiques de la rivière ou de la conduite d'égout. Ainsi on calcule :

$$K = \frac{L}{c} \quad (9.16)$$

où  $L$  est la distance entre les sections d'entrée et de sortie,  
 $c$  est la célérité des ondes qu'on peut estimer par la relation :

$$c = \frac{5}{3} V \quad (9.17)$$

$V$  est la vitesse moyenne calculée pour un débit représentatif de l'écoulement..

La valeur de  $\chi$  se calcule par la relation suivante :

$$\chi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Q_0}{BS_0 cL} \right) \quad (9.18)$$

où  $Q_0$  est le débit représentatif de l'écoulement,  
 $B$  est la largeur à la surface libre du cours d'eau,  
 $S_0$  est la pente longitudinale moyenne.

**9.4 Laminage artificiel à travers un réservoir****9.4.1 Contexte**

Par opposition au laminage naturel dans un tronçon de rivière, le laminage artificiel s'opère à travers un réservoir construit par l'homme. Ce principe est

valable aussi bien en milieu urbain que rural. L'urbanisation modifie la nature des écoulements par l'augmentation des surfaces imperméables. Les débits et les volumes de ruissellement sont importants après les constructions et le pavage des voies, augmentant ainsi les risques d'inondation (figure 9.4).

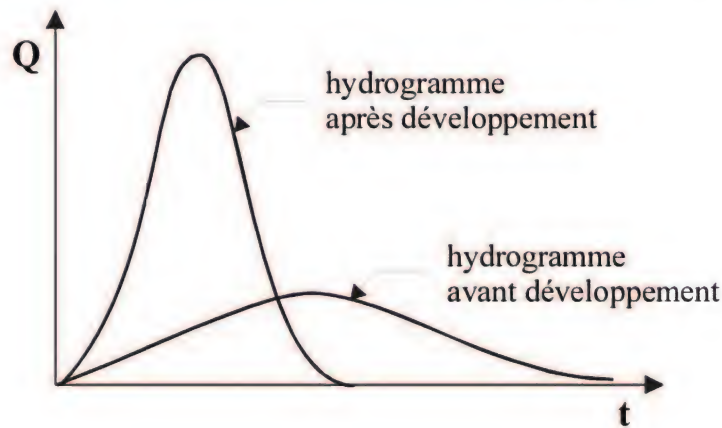


Fig. 9.4 Modification d'hydrogramme par le développement urbain

Par ailleurs, les eaux de ruissellement deviennent plus chargées en polluants, compte tenu des activités domestiques, commerciales et industrielles.

L'impact de ces polluants sur le milieu récepteur et ses usages (rivière, lac...) peut être instantané ou différé. Certains polluants comme la demande biologique en oxygène (DBO), les matières en suspension (MES) et les coliformes peuvent produire un effet choc sur la vie piscicole durant les heures qui suivent un orage. D'autres polluants, comme les métaux lourds et les nutriments (azote et phosphore), peuvent s'accumuler et causer un effet différé durant les mois et les années qui suivent l'orage.

Une des voies privilégiées pour réduire les inondations et l'impact de la pollution sur le milieu récepteur est la rétention des eaux dans des bassins de stockage. Ces derniers doivent être conçus de manière à produire un débit et une concentration de polluants acceptable en aval.

Dans un réseau d'égout pluvial, la pollution est principalement inorganique et consiste en matières en suspension. Cette pollution peut être décantée après un séjour de quelques heures dans les bassins de rétention avant que les eaux devenues plus claires ne rejoignent le milieu récepteur. Dans les réseaux unitaires, les eaux pluviales sont mélangées avec les eaux usées domestiques et industrielles. Les bassins jouent alors simplement un rôle de régulation pour fournir à la station d'épuration un débit qu'elle est capable de traiter.



Il est de plus en plus d'usage d'imposer aux développeurs de concevoir les bassins de telle manière que le débit de pointe de la période après développement reste identique à celui avant développement (figure 9.4). Dans ce dernier cas, on doit normalement spécifier la période de retour pour laquelle ces deux débits doivent coïncider (2 à 100 ans).

#### 9.4.2 Principe de la méthode de solution

Le laminage à travers un réservoir est dû à la restriction qui limite le débit de sortie lorsque l'évacuation s'opère par le fond, à travers une vanne ou un orifice. Dans le cas d'un barrage-déversoir de grande surface, le débit d'entrée ne produit qu'une faible variation de la hauteur d'eau. C'est justement cette hauteur dans le réservoir qui gouverne le débit de sortie qui se voit ainsi laminé. Lorsque le déversoir est muni d'une contraction latérale, le laminage est encore plus prononcé.

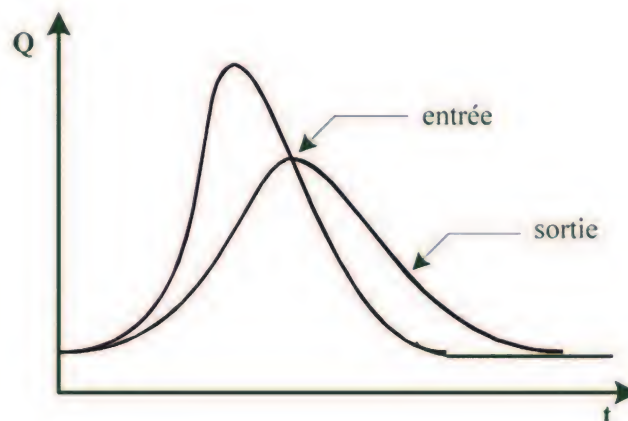


Fig. 9.5 Laminage à travers un réservoir

Pour traduire le bilan d'eau, l'équation (9.6) s'applique encore. Elle peut être réécrite :

$$\left[ 2 \frac{S_2}{\Delta t} + O_2 \right] = \left[ I_1 + I_2 + 2 \frac{S_1}{\Delta t} + O_1 - 2O_1 \right] \quad (9.19)$$

( inconnu )

( connu )

Cette équation permet de résoudre partiellement le problème car elle permet de calculer la quantité inconnue  $[2S_2/\Delta t + O_2]$  en fonction d'autres quantités toutes connues qui figurent dans le membre de droite. Rappelons que les indices 1 et 2 désignent respectivement le début et la fin d'un intervalle de temps.  $I_1$  et  $I_2$ , qui représentent les débits d'entrée au début et à la fin de l'intervalle, sont connus car



l'hydrogramme d'entrée du réservoir est supposé connu à tous les instants.  $S_1$  et  $O_1$  sont connus car ils constituent les conditions initiales qui prévalent avant le début de la crue. Au cours de la crue,  $S_1$  et  $O_1$  sont connus à cause de la récursivité des calculs. Tout comme dans l'équation (9.10), le stockage et le débit de sortie au début d'un intervalle sont calculés à la fin de l'intervalle précédent.

La question qui se pose est : Comment calculer le débit de sortie  $O_2$  à partir de la quantité connue  $[2S_2/\Delta t + O_2]$  ?

Il est possible de construire pour chaque réservoir sa propre courbe caractéristique  $2S/\Delta t + O = f(O)$ . Cette courbe est indépendante de l'hydrogramme d'entrée du réservoir. Elle ne dépend que des propriétés géométriques du réservoir et de sa structure d'évacuation.

Comme il sera démontré dans les deux prochains paragraphes, le stockage  $S$  et le débit de sortie dépendent de la profondeur  $h$  dans le réservoir. On se donne arbitrairement un certain nombre de valeurs de  $h$  pour couvrir adéquatement les plages de variation en période de crue et on construit le tableau suivant :

$h_1$	$S_1$	$O_1$	$2S_1/\Delta t + O_1$
$h_2$	$S_2$	$O_2$	$2S_2/\Delta t + O_2$
$h_3$	$S_3$	$O_3$	$2S_3/\Delta t + O_3$
...	...	...	...
$h_n$	$S_n$	$O_n$	$2S_n/\Delta t + O_n$

Tableau 9.3

Les deux dernières colonnes du tableau 9.3 permettent de tracer la fonction cherchée  $f(O) = \frac{2S}{\Delta t} + O$ .

### 9.4.3 Calcul du débit de sortie

Il y a plusieurs types d'évacuation de l'eau des réservoirs. Globalement, on peut pratiquement tous les intégrer dans l'une ou l'autre des deux familles suivantes :

- 1 Évacuation à surface libre par un déversoir (figure 9.6).

Dans ce cas, le débit de sortie se calcule par une relation de la forme :

$$Q = CBH^{3/2} = CB(h - z)^{3/2} \quad (9.20)$$

- où C est une constante qui tient compte de la forme du déversoir (voir le chapitre 6),  
 B est la largeur de déversoir,  
 H est la charge au-dessus de la crête z en avant du déversoir,  
 h est la profondeur d'eau en amont du déversoir.

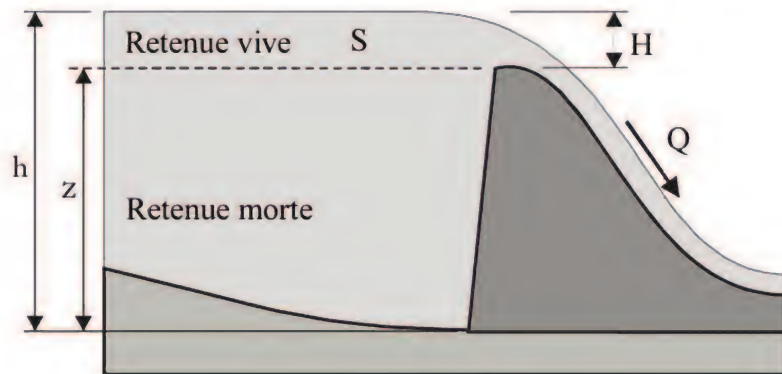
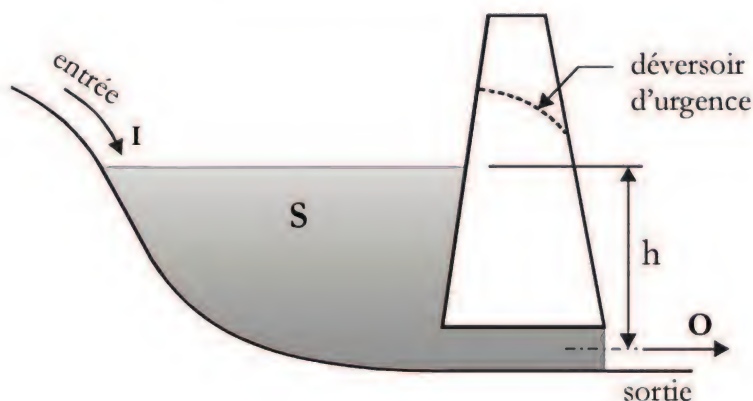


Fig. 9.6 Évacuation à surface libre par déversoir

- 2 Évacuation par le fond à travers une vanne ou un orifice (figure 9.7)  
 Le débit se calcule alors par une relation de la forme :

$$Q = mA\sqrt{2gh} \quad (9.21)$$

- où m est une constante de débit (voir chapitre 6),  
 A est la section d'écoulement,  
 h est la hauteur d'eau à partir du centre de la section d'écoulement jusqu'à la surface libre.



Que l'évacuation se fasse par le fond ou par dessus le déversoir, la connaissance de h permet de calculer le débit de sortie.

Fig. 9.7 Évacuation par le fond

#### 9.4.4 Calcul du volume stocké

Quand la section  $A$  du réservoir est constante, le calcul du volume stocké  $S$  pour une profondeur  $h$  donnée se fait à l'aide de la formule simple suivante :

$$S = Ah \quad (9.22)$$

Ceci est le cas pour certains bassins de rétention artificiels construits en milieu urbain.

Pour les réservoirs naturels, les berges ne sont pas verticales. Les courbes d'emmagasinement se présentent alors sous la forme :

$$S = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots + a_n h^n \quad (9.23)$$

Les coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , qui sont propres à chaque réservoir, doivent être déterminés à partir des relevés géodésiques sur le fond et les berges.

Que la section soit constante ou variable avec la profondeur, la connaissance de  $h$  permet de déterminer le volume stocké.

#### *Application 9.1*

Il s'agit de déterminer l'hydrogramme de sortie d'un barrage-déversoir (figure 9.6) correspondant à l'hydrogramme de crue à l'entrée donné au tableau 9.4

Temps (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
I (m <sup>3</sup> /s)	6	12	44	90	150	80	65	20	8
Q (m <sup>3</sup> /s)	6	?	?	?	?	?	?	?	?

Tableau 9.4

Le réservoir qui a une superficie  $A$  de 1,0km<sup>2</sup> possède des parois verticales. Le débit de sortie peut être calculé par la relation :

$$Q = 50 \cdot H^{3/2}$$



La première étape consiste à déterminer la courbe caractéristique du réservoir  $\left(\frac{2S}{\Delta t} + O\right) = f(O)$ .

Initialement le débit de sortie est  $O = 6 \text{ m}^3/\text{s}$  et la hauteur est  $H_0 = (6/50)^{2/3} = 0,243 \text{ m}$ . Le volume stocké initialement est  $H_0 \cdot A = 0,243 \text{ m} \cdot (1,0 \cdot 10^6 \text{ m}^2) = 0,243 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ .

La valeur maximale du débit d'entrée  $150 \text{ m}^3/\text{s}$  nous donne la plage à couvrir avec la variable  $h$  :  $150 = 50H^{3/2}$ , soit  $H = 2,08 \text{ m}$ . Compte tenu du laminage, cette hauteur ne sera jamais atteinte dans le réservoir. Les résultats obtenus pour des valeurs choisies de  $H$  sont montrés sur le tableau 9.5.

H (m)	S ( $\text{m}^3 \times 10^6$ )	O ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$\frac{2S}{\Delta t} + O$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
0,243	0,243	6	51
0,5	0,5	17,67	110,3
1,0	1,0	50,0	235,2
1,5	1,5	91,85	369,6
2,0	2,0	141,4	511,8

Tableau 9.5

On peut représenter graphiquement  $O$  en fonction de  $\left(\frac{2S}{\Delta t} + O\right)$ , tel que montré sur la figure 9.8.

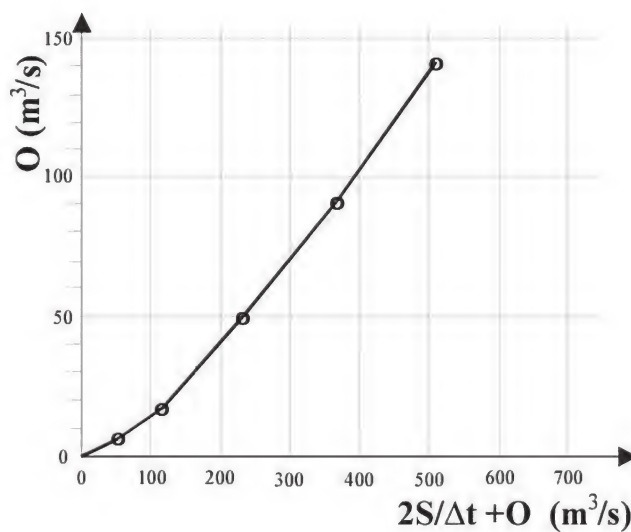


Fig. 9.8

Pour calculer l'hydrogramme laminé, on adopte la démarche suivante pour construire le tableau 9.6:

- On détermine la colonne 3 du tableau 9.6 directement à partir de la colonne 2,

- À partir de  $\left[ \left( \frac{2S}{\Delta t} + O \right) - 2 \cdot O \right]_1$  de la colonne 5 et  $(I_1 + I_2)$  de la

colonne 3 on calcule  $\left( \frac{2S}{\Delta t} + O \right)_2$  à la colonne 4 selon l'équation (9.19),

- À partir de  $\left( \frac{2S}{\Delta t} + O \right)_2$  de la colonne 4 on trouve  $O_2$  de la colonne 6 par la courbe (figure 9.8).

1	2	3	4	5	6
temps (heures)	Débit d'entrée I (m <sup>3</sup> /s)	$I_1 + I_2$ (m <sup>3</sup> /s)	$\left( \frac{2S}{\Delta t} + O \right)$ (m <sup>3</sup> /s)	$\left( \frac{2S}{\Delta t} + O \right) - 2O$ (m <sup>3</sup> /s)	Débit de sortie O (m <sup>3</sup> /s)
0	6	18	51	39	6
3	12	56	57	43	7
6	44	134	99	69	15
9	90	240	203	123	40
12	150	230	363	191	86
15	80	145	421	203	109
18	65	85	348	178	85
21	20	28	263	151	56
24	8	16	179	111	34
27	8	16	127	85	21
30	8	16	101	71	15
33	8	16	87	65	11
36	8	16	81	61	10
39	8	16	77		8

Tableau 9.6

Les hydrogrammes d'entrée I et de sortie O sont montrés graphiquement sur la figure 9.9.

L'analyse du tableau 9.6 confirme les affirmations concernant le laminage de crue à travers un réservoir :

- 1- Le débit de pointe à l'entrée ( $150\text{m}^3/\text{s}$ ) survient à 12h alors qu'il ne survient à la sortie que trois heures plus tard (voir la figure 9.8).
- 2- Le débit de pointe à la sortie ( $109\text{m}^3/\text{s}$ ) est plus faible qu'à l'entrée ( $150\text{m}^3/\text{s}$ ). On peut calculer un facteur d'amortissement  $FA = 109/150 = 0,72$ . Ce facteur caractérise la performance de l'ouvrage par rapport au laminage des crues.
- 3- Le volume total d'entrée ( $\sum I\Delta t = 5,65 \cdot 10^6\text{m}^3$ ) et de sortie ( $\sum O\Delta t = 5,43 \cdot 10^6\text{m}^3$ ) sont sensiblement les mêmes. La faible différence provient des erreurs de lecture.

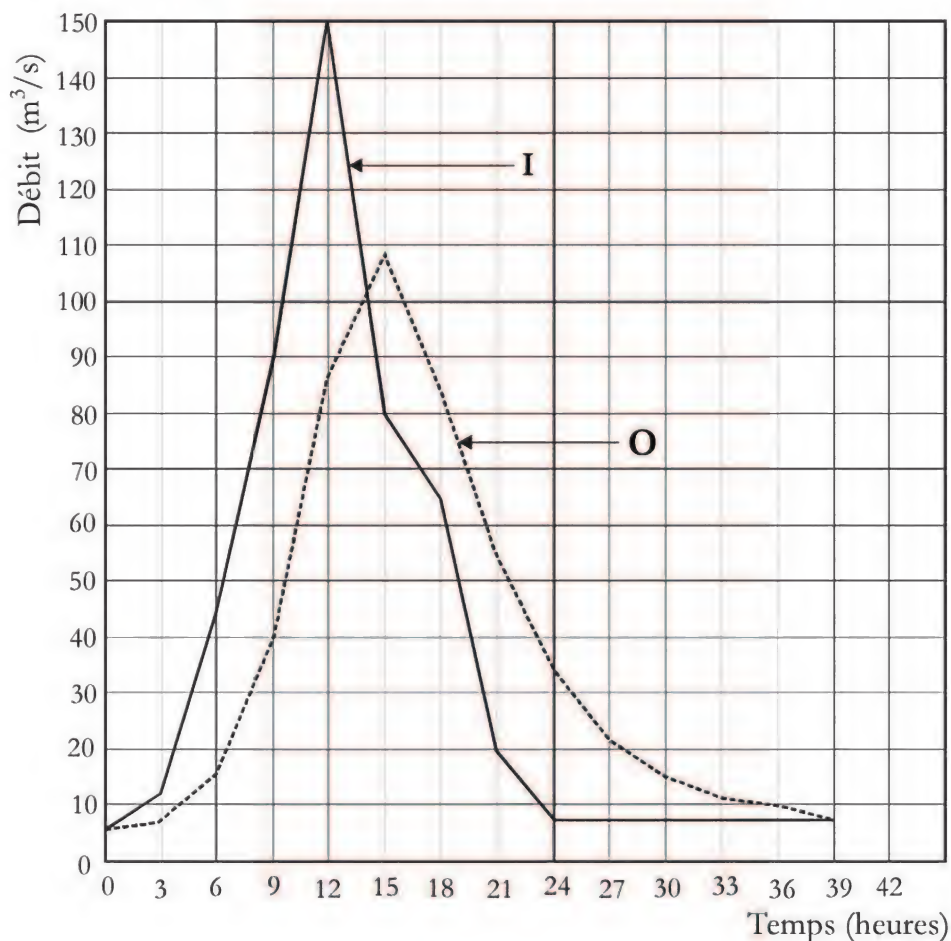


Fig. 9.9



## RÉSUMÉ

- 1- Le modèle de Muskingum permet de calculer l'hydrogramme laminé à travers un tronçon de rivière ou d'égout :

$$O_2 = c_0 I_2 + c_1 I_1 + c_2 O_1$$

$$c_0 = \frac{-K\chi + 0,5\Delta t}{K(1-\chi) + 0,5\Delta t} \quad c_1 = \frac{K\chi + 0,5\Delta t}{K(1-\chi) + 0,5\Delta t} \quad c_2 = \frac{K(1-\chi) - 0,5\Delta t}{K(1-\chi) + 0,5\Delta t}$$

La valeur la plus appropriée de  $\chi$  est celle qui donne un rapport  $K$  constant :

$$K = \frac{0,5\Delta t[(I_1 + I_2) - (O_1 + O_2)]}{\chi(I_2 - I_1) + (1-\chi)(O_2 - O_1)} = \frac{\text{Num}}{\text{Den}}$$

Le modèle de Muskingum-Cunge permet d'estimer  $K$  et  $\chi$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K &= L/c \\ c &= (5/3)V \\ \chi &= (1/2)[1 - Q_0/(BS_0cL)] \end{aligned}$$

- 2- Le calcul de l'hydrogramme laminé à travers un réservoir se fait en écrivant l'équation de continuité sous la forme :

$$\left(\frac{2S}{\Delta t} + O\right)_2 = I_1 + I_2 + \left(\frac{2S}{\Delta t} + O\right)_1 - 2O_1$$

Comme le calcul est récursif, on peut calculer  $(2S/\Delta t + O)_2$  en fonction de quantités calculées dans l'étape précédente, figurant dans le membre de droite de l'équation. Par ailleurs, la courbe caractéristique du réservoir  $O = f(2S/\Delta t + O)$ , permet de calculer graphiquement  $O_2$  à partir de  $(2S/\Delta t + O)_2$ .

### Exercice 9.1

<b>Temps</b> (jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>I</b> (m <sup>3</sup> /s)	0	18	47	30	16	10	5	2	0	0	0
<b>O</b> (m <sup>3</sup> /s)	0	4	22	37	28	17,5	10,5	5,6	2	1	0

- ### Exercise 9.2

heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Entrée (m³/s)	100	300	700	500	400	300	200	100	100	100	100	100	100	100	100
Sortie (m³/s)	100	100	200	450	475	438	369	284	192	146	123	112	106	103	101

- [illegible]

### Exercice 9.3

Un réservoir dont la forme peut être assimilée à une section rectangulaire, a une superficie égale à  $2,0 \text{ km}^2$ . Le débit qui passe par dessus son déversoir suit la loi

$$Q = 4,8 \cdot H^{3/2}.$$

Il faut déterminer l'hydrogramme laminé pour l'hydrogramme d'entrée suivant :

jour	1		2		3		4		5		6		7	
heure	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12
Q (m <sup>3</sup> /s)	20	40	90	200	300	340	290	210	140	85	50	40	30	20



## OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 9

Chocat, B. (1997), *Encyclopédie de l'hydrologie et de l'assainissement*, Paris, Lavoisier TEC & DOC.

Cunge, J.A. (1867), «On the Subject of a Flood Propagation Method», *J. Hyd. Res.*, IAHR, vol 7, n° 2, p. 205-230.

Cunge, J.A. et Wegner, M. (1964), «Intégration numérique des équations de Saint-Venant par schéma implicite de différences finies», *La Houille Blanche*, n° 1.

Cunge, J.A., Holly, F.M. Jr et Verwey, A. (1980), *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Boston (MA), Pitman.

Fread, D.L. (1993), «Flow Routing», *Handbook of Hydrology*, p. 10.1-10.36.

## SYMBOLES DU CHAPITRE 9

$a_0 \dots a_n$	: coefficients de stockage d'un réservoir
$A$	: section d'écoulement
$B$	: largeur au plan d'eau, largeur de déversoir
$c$	: célérité d'une onde
$c_0, c_1, c_2$	: coefficients
$C$	: constante de forme de déversoir
$f, F$	: fonction
$g$	: accélération due à la gravité
$h$	: hauteur, profondeur
$H$	: charge au-dessus de la crête d'un déversoir
$I$	: débit d'entrée (« Input »)
$K$	: caractéristique d'un tronçon de rivière, constante d'emmagasinement
$L$	: distance entre les sections d'entrée et de sortie
$m$	: constante de débit
$O$	: débit de sortie (« Output »)
$q$	: débit latéral d'un tronçon de rivière
$Q$	: débit
$Q_0$	: débit représentatif
$Q_E$	: débit d'entrée
$Q_S$	: débit de sortie
$S$	: emmagasinement, volume stocké
$S_0$	: pente longitudinale moyenne
$S_f$	: pente de la ligne d'énergie
$t$	: temps
$V$	: vitesse moyenne d'écoulement
$x$	: longueur horizontale, abscisse
$y$	: hauteur, ordonnée
$z$	: cote, hauteur de crête de déversoir
$\Delta$	: variation
$\chi$	: constante caractéristique d'un tronçon

# Chapitre 10

## *Hydrologie statistique*

### Objectifs

- 1- Comprendre les notions de risque et de fiabilité hydrologiques.
- 2- Savoir calculer le débit correspondant à une période de retour donnée et la période de retour qui correspond à un débit donné, à l'aide de différentes lois de distribution de probabilité.
- 3- Déterminer l'intervalle de confiance d'une estimation du débit d'une période de retour donnée.



## 10.1 Introduction

Dans le contexte d'une gestion en temps réel d'un réservoir, l'ingénieur fait appel aux notions développées dans l'hydrologie déterministe (chapitres 7, 8 et 9). Il prévoit ainsi les apports d'eau pour les prochaines heures à partir des données météorologiques mesurées ou prévues afin de gérer les ouvrages d'une manière optimale et sécuritaire. Dans l'étape de conception de l'ouvrage, il n'est pas possible de prévoir les apports d'eau d'une manière déterministe. À titre d'exemple, l'ingénieur doit a priori fixer le débit journalier maximal que les évacuateurs de crues sont capables d'évacuer. Le dimensionnement des évacuateurs doit donc être fait en fonction des apports pour toute la durée de vie utile des ouvrages, durée qui peut atteindre, voire dépasser, cent ans. Les données météorologiques n'étant pas connues pour cet horizon, on doit les prédire en utilisant une méthode purement statistique qui est développée dans le présent chapitre. Cette approche est aussi nécessaire pour la planification de la gestion à moyen et long termes des ouvrages (horizon de 1 à 10 ans).

Une étude statistique comprend généralement les trois étapes suivantes :

- 1) La première étape consiste à rassembler le maximum de données existantes sur le problème traité : critiquer, classer, mettre en ordre ces données. Par la suite, il faut réduire le tableau de données à un volume de chiffres beaucoup moins important et plus maniable. On peut utiliser les statistiques descriptives pour condenser l'information à l'aide de quelques graphes et valeurs types telles que moyenne, écart-type, etc.
- 2) La deuxième étape consiste à analyser les résultats afin de leur adapter le modèle probabiliste le plus adéquat. On condense donc la masse d'information dont on dispose dans une équation mathématique qu'on appelle modèle mathématique.
- 3) La troisième étape permet de récolter les fruits du travail des deux premières étapes. On utilise alors le modèle mathématique obtenu précédemment pour faire du design, de la prévision ou la reconstitution de données manquantes.

## 10.2 Période de retour, risque hydrologique et règles générales de design

### 10.2.1 Définitions

On désigne par *intervalle de récurrence* la durée moyenne séparant deux événements critiques qui causent une défaillance de l'ouvrage. On entend par *défaillance* le fait que l'ouvrage ne remplit pas la mission pour laquelle il a été conçu. Il peut s'agir d'un évacuateur de crues qui voit sa capacité dépassée et cause des inondations ou met la sécurité du barrage en péril. Ça peut aussi être le cas d'un batardeau submergé ou d'un ponceau qui inonde une route à la suite du dépassement de sa capacité.

### 10.2.2 Gestion du risque hydrologique

L'ingénieur doit considérer principalement deux facteurs conflictuels dans la conception d'une structure hydraulique (ponceau, conduite d'égout, évacuateur de crues...) : le facteur économique et le facteur risque.

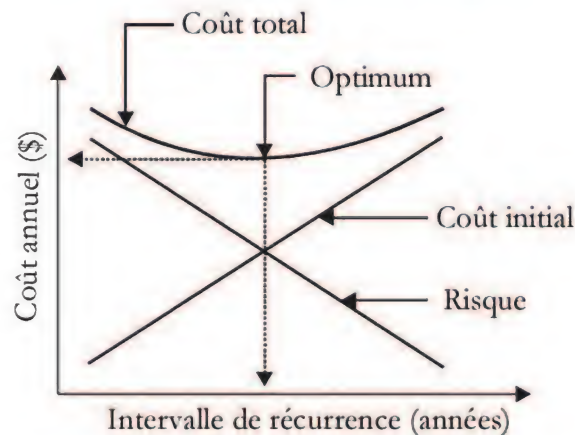


Fig. 10.1 Facteurs de coût d'une structure hydraulique

La figure 10.1 montre que le risque (coûts social et matériel d'une défaillance) est décroissant avec l'intervalle de récurrence choisi. À l'inverse, les coûts d'investissement et d'installation de la structure sont croissants avec cet intervalle. Il existe un point d'équilibre (optimum) pour un design sécuritaire et économique.

Lorsque des vies humaines sont en jeu, l'analyse économique n'est plus valable et le facteur social devient prépondérant.



La valeur du débit de conception  $Q_T$  est déterminée à partir de la période moyenne tolérée,  $T$  en années, qui sépare deux défaillances. Lorsqu'on conçoit un évacuateur de crues pour évacuer un débit journalier maximal centenaire  $Q_{100} = 1000\text{m}^3/\text{s}$ , ceci signifie que sur une très longue période, disons mille années, le débit de pointe de crue dépassera cette valeur critique en moyenne une fois par siècle. Il s'agit bien d'une moyenne car dans certains intervalles de cent années, le nombre de dépassements de ce débit peut être de 30, 40 et même 100, alors qu'il peut être nul pour d'autres.

Pour chaque observation du débit  $Q$ , la *probabilité de dépassement*  $P(Q \geq Q_T)$  d'une valeur critique  $Q_T$  est l'inverse de la *période de retour*  $T$  de cette valeur :

$$p = P(Q \geq Q_T) = \frac{1}{T} \quad (10.1)$$

À titre d'exemple, chaque année la probabilité de dépassement du débit d'inondation centenaire  $Q_{100}$  est :

$$p = P(Q \geq Q_{100}) = \frac{1}{100} = 0,01$$

Cette probabilité  $p$  qui quantifie la vulnérabilité d'un système hydrique est appelée *risque hydrologique*. La *fiabilité* est la probabilité complémentaire de non dépassement  $P(Q < Q_{100})$  d'une valeur critique  $Q_T$  :

$$\text{fiabilité} = P(Q < Q_T) = 1 - \frac{1}{T} \quad (10.2)$$

Chaque année, la fiabilité a priori du système hydrique par rapport au débit centenaire est  $1 - 1/100 = 0,99$ .

Comme les débits de pointe printaniers successifs ne sont pas corrélés d'une année à l'autre, on dit que ces événements sont indépendants et la loi multiplicative des probabilités s'applique. La fiabilité durant «  $n$  » années consécutives devient ainsi :

$$\text{fiabilité(durant } n \text{ années)} = \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \quad (10.3)$$

Le risque hydrologique durant «  $n$  » années consécutives est la probabilité de défaillance durant au moins une année. C'est la probabilité complémentaire de la fiabilité, soit :

$$\text{risque(durant } n \text{ années)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n \quad (10.4)$$



### Application 10.1

Quel est le risque de dépassement du débit centenaire  $Q_{100}$  durant les 100 prochaines années?

D'après (10.4), ce risque est :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} = 0,634$$

Cette application montre que la période de retour est une durée moyenne sur une longue période qui sépare deux défaillances. Il y a seulement 63,4% de risque que la crue centenaire soit observée ou dépassée à un endroit donné durant les cent prochaines années.

## 10.3 Détermination des probabilités de dépassement

Les événements hydrologiques extrêmes qui peuvent causer des problèmes sont de différentes natures (inondation, tempête de neige ou de verglas...). Pour fixer les idées et simplifier l'exposé, on cible dans ce qui suit le débit journalier maximum de l'année. C'est la valeur du débit qui peut causer une inondation ou un dépassement de la capacité d'un évacuateur de crue.

Dans les régions nordiques où la fonte des neiges constitue une grande part de l'écoulement pour les grands bassins versants, cette valeur maximale du débit est normalement observée durant la crue printanière. Afin de travailler avec un échantillon homogène, même si le débit de pointe d'une crue automnale dépasse au cours d'une année le débit de pointe d'une crue printanière, c'est cette dernière qui sera retenue. Ainsi, parmi les 365 valeurs du débit journalier enregistrées chaque année, on retient la seule valeur du débit de pointe de la crue printanière (figure 10.2).

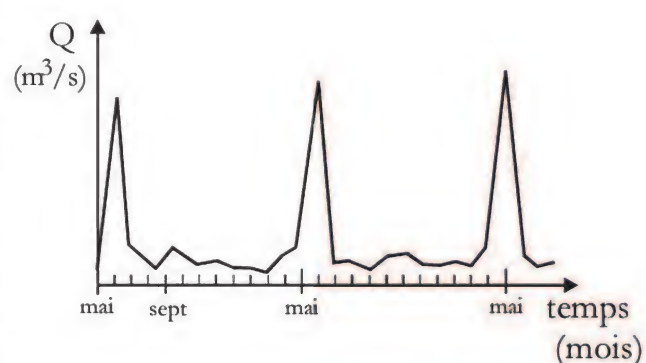


Fig. 10.2 Débit dans une rivière

Soit  $N$  le nombre d'années d'observations. On classe les  $N$  valeurs de débit de pointe des crues observées par ordre décroissant. Soit  $m$  le rang d'une valeur  $X_m$ . La probabilité  $P$  de dépassement de la valeur  $X_m$  peut être estimée à partir de la formule de Weibull :

$$P(X \geq X_m) = \frac{m}{N+1} \quad (10.5)$$

Ainsi, pour la valeur la plus élevée  $X_1$  dans l'échantillon :

$$P(X \geq X_1) = \frac{1}{N+1} \quad (10.6)$$

Pour la valeur la plus faible  $X_N$  de l'échantillon on a :

$$P(X \geq X_N) = \frac{N}{N+1} \approx 1 \quad (10.7)$$

Il devient clair que cette approche n'est pas appropriée pour représenter les débits extrêmes. À titre d'exemple, si un échantillon de 25 données de débit renferme une valeur réellement extrême, cette dernière reste systématiquement fixée à une période de retour de 26 ans. Par ailleurs, on ne peut pas déterminer pour cet exemple le débit centenaire ou millénaire.

Plusieurs estimateurs proposent de généraliser le calcul de la probabilité de Weibull par la formule suivante (Viessman et Lewis, 1995) :

$$P(X \geq X_m) = \frac{am + b}{cN + d} \quad (10.8)$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes.

À titre d'exemple, la méthode de Tukey donne :

$$P(X \geq X_m) = \frac{3m - 1}{3N + 1} \quad (10.9)$$

et la formule de Hazen donne :

$$P(X \geq X_m) = \frac{m - 0,5}{N} \quad (10.10)$$

## Application 10.2

Les débits de pointe de la crue printanière observés à l'exutoire d'un bassin versant durant 60 années sont fournies au tableau 10.1.

Année	Débit de Pointe (m <sup>3</sup> /s)	Année	Débit de Pointe (m <sup>3</sup> /s)	Année	Débit de Pointe (m <sup>3</sup> /s)
1944	590	1964	448	1984	805
1945	600	1965	720	1985	530
1946	1090	1966	960	1986	540
1947	612	1967	1010	1987	1375
1948	1030	1968	415	1988	870
1949	630	1969	889	1989	1360
1950	620	1970	910	1990	490
1951	701	1971	920	1991	510
1952	714	1972	1050	1992	520
1953	715	1973	445	1993	810
1954	450	1974	1140	1994	760
1955	452	1975	728	1995	780
1956	1760	1976	732	1996	1400
1957	1840	1977	750	1997	680
1958	460	1978	820	1998	1610
1959	480	1979	840	1999	454
1960	1560	1980	1190	2000	455
1961	690	1981	1300	2001	1950
1962	615	1982	1310	2002	2120
1963	660	1983	790	2003	580

Tableau 10.1 Débits de pointe de la crue printanière

La figure 10.3 montre la série chronologique des débits de pointe de 1944 à 2002.

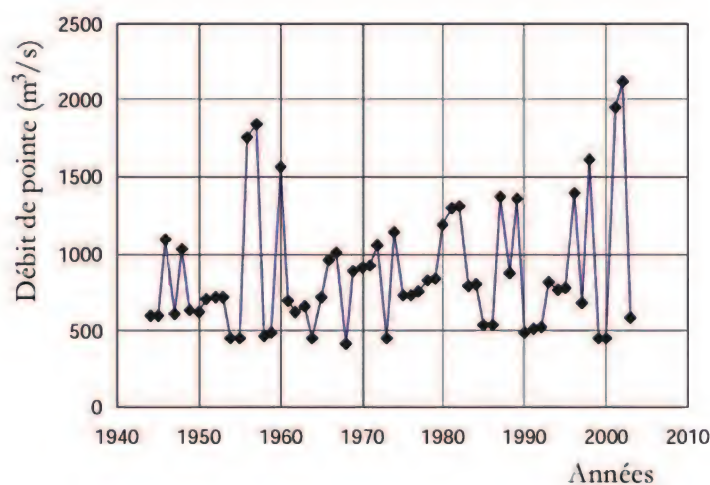


Fig. 10.3 Série chronologique des débits de pointe



Il faut trouver les probabilités de dépassement du débit de  $1950\text{m}^3/\text{s}$  et de  $2120\text{m}^3/\text{s}$  en utilisant la formule de Weibull puis celle de Tukey.

On commence par classer les débits de pointe observés selon un ordre décroissant de leur valeur (tableau 10.2).

Rang	Débit de pointe ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Probabilité de dépassement	Rang	Débit de pointe ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Probabilité de dépassement
1	2120	0,0164	31	732	0,5082
2	1950	0,0328	32	728	0,5246
3	1840	0,0492	33	720	0,5410
4	1760	0,0656	34	715	0,5574
5	1610	0,0820	35	714	0,5738
6	1560	0,0984	36	701	0,5902
7	1400	0,1148	37	690	0,6066
8	1375	0,1311	38	680	0,6230
9	1360	0,1475	39	660	0,6393
10	1310	0,1639	40	630	0,6557
11	1300	0,1803	41	620	0,6721
12	1190	0,1967	42	615	0,6885
13	1140	0,2131	43	612	0,7049
14	1090	0,2295	44	600	0,7213
15	1050	0,2459	45	590	0,7377
16	1030	0,2623	46	580	0,7541
17	1010	0,2787	47	540	0,7705
18	960	0,2951	48	530	0,7869
19	920	0,3115	49	520	0,8033
20	910	0,3279	50	510	0,8197
21	889	0,3443	51	490	0,8361
22	870	0,3607	52	480	0,8525
23	840	0,3770	53	460	0,8689
24	820	0,3934	54	455	0,8852
25	810	0,4098	55	454	0,9016
26	805	0,4262	56	452	0,9180
27	790	0,4426	57	450	0,9344
28	780	0,4590	58	448	0,9508
29	760	0,4754	59	445	0,9672
30	750	0,4918	60	415	0,9836

Tableau 10.2 Classement des débits

Selon la formule de Weibull,

$$P(X \geq 1950 \text{ m}^3/\text{s}) = \frac{m}{N+1} = \frac{2}{61} = 0,0328.$$

D'après (10.1), le débit de pointe printanier de  $1950 \text{ m}^3/\text{s}$  revient en moyenne tous les  $T = 1/P = 1/0,0328 = 30,5$  ans.

Selon la formule de Tukey,

$$P(X \geq 1950 \text{ m}^3/\text{s}) = \frac{3m-1}{3N+1} = 0,0276$$

D'après (10.1), le débit de pointe printanier revient en moyenne tous les  $T = 1/P = 1/0,0276 = 36,0$  ans.

$P(X \geq 2120 \text{ m}^3/\text{s}) = \frac{1}{61} = 0,0164$  Donc, la période de retour de la plus grande valeur de l'échantillon de  $N$  valeurs est systématiquement  $N + 1$ , ce qui constitue une faiblesse de cette approche.

## 10.4 Détermination analytique des probabilités de dépassement

La détermination analytique des probabilités de dépassement consiste à utiliser des fonctions de probabilité. Ces fonctions font appel à certains paramètres qui sont définis ci-dessous.

### 10.4.1 Paramètres d'un échantillon et d'une population

En statistique, de façon générale, et en hydrologie en particulier, une série d'observations (précipitations, débits, etc.) équivaut à un échantillon. L'ensemble de toutes les observations théoriquement possibles est égal à la population en statistique. Comme la population est en pratique inconnue, on suppose a priori qu'elle peut être générée par une fonction de probabilité. Les paramètres de cette fonction (moyenne, écart-type...) sont supposés égaux aux paramètres de l'échantillon. C'est la méthode des moments.

Voici les paramètres d'un échantillon ou d'une population les plus fréquemment utilisés :

### 1) Moyenne arithmétique

La moyenne est le premier moment centré par rapport à l'origine. C'est la valeur la plus utilisée en pratique pour caractériser l'ordre de grandeur des observations :

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i \quad (10.11)$$

### 2) Écart-type

La variance  $\sigma^2$  est le second moment centré par rapport à la moyenne. L'écart-type qui est la racine carrée de la variance, indique la dispersion des observations autour de la moyenne (figure 10.4) :

$$\sigma = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2 \right]^{1/2} \quad (10.12)$$

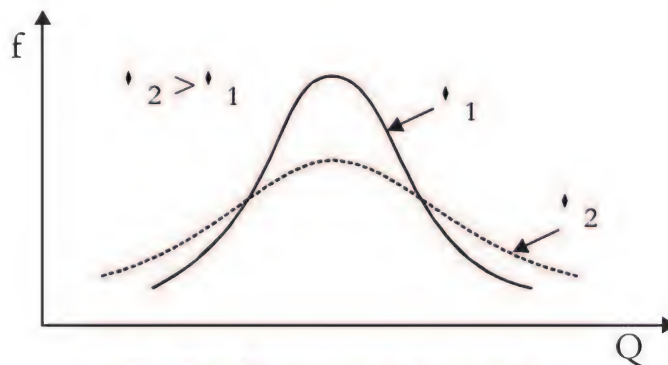


Fig. 10.4 Écart-type et dispersion

### 3) Coefficient d'asymétrie

Ce coefficient est le troisième moment centré autour de la moyenne. Comme son nom l'indique, ce coefficient mesure la symétrie de la distribution par rapport à la moyenne :

$$C_s = \frac{\left[ N \sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^3 \right]}{(N-1)(N-2)\sigma^3} \quad (10.13)$$



Ce coefficient est nul pour une distribution parfaitement symétrique (figure 10.5, a). Il est positif (figure 10.5, b) ou négatif (figure 10.5, c) en fonction de la position de la moyenne par rapport à la pointe de la distribution.

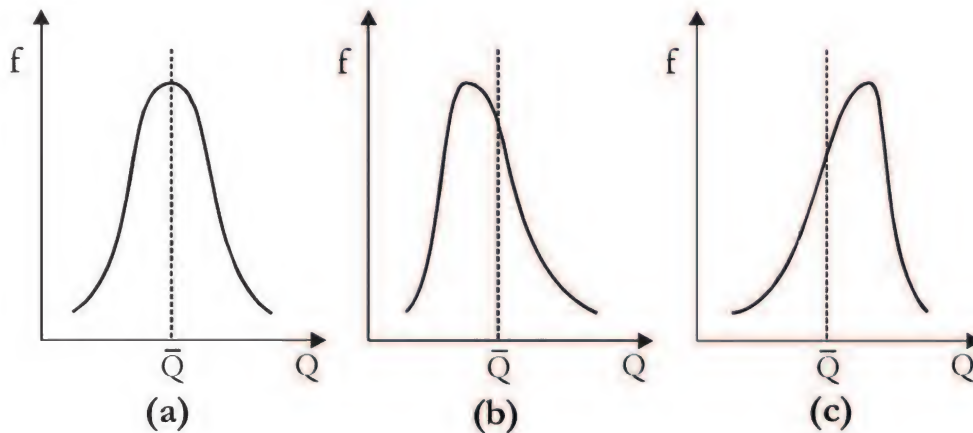


Fig. 10.5 Distributions symétrique et asymétriques

#### 10.4.2 Modèle général pour l'estimation des quantiles

Pour déterminer le débit  $Q_T$  correspondant à une période de retour  $T$ , on utilise la formulation générale suivante (Chow, 1951) :

$$Q_T = \bar{Q} + K_T \sigma \quad (10.14)$$

$K_T$  est un paramètre de fréquence propre à chaque fonction de distribution de probabilité.

Pour déterminer la période de retour  $T$  correspondante à un débit donné  $Q_T$ , on utilise l'équation (10.14) écrite sous la forme :

$$K_T = \frac{Q_T - \bar{Q}}{\sigma} \quad (10.15)$$

Nous allons voir maintenant comment s'exprime le paramètre de fréquence  $K_T$  pour certaines lois de probabilité.

## 10.5 Loi normale

Dans cette loi de probabilité, la valeur de la variable étudiée résulte de l'action d'un grand nombre de facteurs dont les effets sont additifs. Les fluctuations de ces facteurs sont indépendantes et du même ordre de grandeur. La loi normale est très utilisée en hydrologie pour analyser les valeurs moyennes des grandeurs comme la température, les précipitations ... Elle n'est cependant pas appropriée pour l'ajustement des débits extrêmes de crues printanières dans les régions nordiques; ces débits dépendent du phénomène régulier et prépondérant qu'est la fonte des neiges. Une loi normale est caractérisée uniquement par la moyenne  $\bar{Q}$  et l'écart-type  $\sigma$ . Sa fonction de densité de probabilité est :

$$f(Q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Q-\bar{Q}}{\sigma}\right)^2} \quad (10.16)$$

### 10.5.1 Propriétés de la loi normale

La distribution normale est une distribution symétrique en forme de cloche. Le polygone de fréquences ou l'histogramme donne souvent une bonne indication si la variable observée se comporte selon une loi normale. La propriété principale de la distribution normale est la symétrie par rapport à la moyenne ( $C_s=0$ ) (figure 10.6):

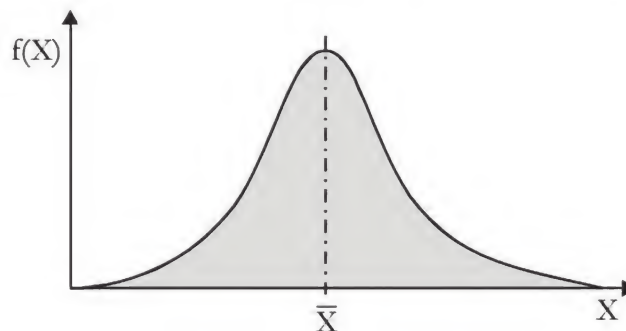


Figure 10.6 Distribution normale

### 10.5.2 Loi normale centrée réduite

En posant :

$$Z = \frac{Q - \bar{Q}}{\sigma} \quad (Q = \sigma Z + \bar{Q}) \quad (10.17)$$

la fonction de densité de la loi normale doivent :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \quad (10.18)$$

La nouvelle variable aléatoire  $Z$  possède une moyenne nulle et une variance égale à 1. Cette variable est identique au paramètre de fréquence  $K_T$  recherché qui a été défini dans l'expression 10.14.

La formule mathématique de la loi normale est rarement utilisée en pratique. On se sert plutôt de tables de probabilité. Ces tables présentent des valeurs basées sur la fonction de répartition exprimée par :

$$F(Z) = \int_{-\infty}^Z f(u) du = \int_{-\infty}^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad (10.19)$$

Le tableau 10.8 présenté à la fin de ce chapitre fournit la probabilité de non dépassement  $F(Z)$  d'une valeur de débit  $Q$  représentée par la valeur centrée réduite  $Z$  selon (10.19). La probabilité de dépassement peut être calculée comme la valeur complémentaire par rapport à l'unité puisque :

$$P(Q < Q_T) + P(Q \geq Q_T) = 1$$

### 10.5.3 Procédure d'utilisation de la loi normale

Le débit correspondant à une période de retour  $T$  peut être calculé en utilisant la procédure suivante :

- 1- on calcule  $F(Z) = 1 - 1/T$ ,
- 2- on obtient  $Z$  à partir de  $F(Z)$ , table 10.8,
- 3- on calcule  $Q_T = \bar{Q} + Z\sigma$

Inversement, la période de retour  $T$  qui correspond à un débit donné  $Q$  peut être calculée selon les étapes suivantes :

- 1-  $Z = (Q - \bar{Q}) / \sigma$ ,
- 2- la table 10.8 fournit  $F(Z)$ ,
- 3-  $T = 1 / [1 - F(Z)]$ .



### Application 10.3

On doit calculer le débit ayant une période de retour de 100 ans et trouver la période de retour associée au débit le plus élevé de l'échantillon fourni au tableau 10.1.

Les paramètres de l'échantillon sont :

$$\bar{Q} = 870,58 \text{ m}^3/\text{s} \quad \sigma = 410,62 \text{ m}^3/\text{s} \quad C_s = 1,297$$

Comme le coefficient d'asymétrie de l'échantillon est manifestement non nul, on peut déjà douter de l'adéquation d'une distribution symétrique telle que la normale pour représenter la population. Le tableau 10.8 indique la valeur de  $Z$  associée à la probabilité de non dépassement 0,99, soit  $Z = 2,33$ .

Pour l'application :

$$Q_{100} = \bar{Q} + 2,33\sigma = 1827,32 \text{ m}^3/\text{s}$$

On peut remarquer qu'il y a trois valeurs de débit dans l'échantillon qui dépassent le débit centenaire.

La valeur du paramètre de fréquence  $Z$  associée à la plus grande valeur de l'échantillon  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$  est, selon (10.20) :

$$Z = \frac{Q - \bar{Q}}{\sigma} = \frac{2120 - 870,58}{410,62} = 3,043$$

Le tableau 10.8 indique que la probabilité de non dépassement associée à cette valeur de  $Z$  est  $P(Q \leq 2120 \text{ m}^3/\text{s}) = 0,9988$ . La probabilité de dépassement de ce débit est par conséquent :

$$P(Q > 2120 \text{ m}^3/\text{s}) = 1 - 0,9988 = 0,0012.$$

La période de retour du débit  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$  est :

$$T = 1/P = 1/0,0012 = 833 \text{ ans.}$$

Le tableau 10.3 indique les probabilités de dépassement des différents débits calculés avec la loi normale. Il faut noter que ces valeurs ont été obtenues à l'aide de l'équation analytique de la loi normale (10.19). Elles sont par conséquent plus précises que celles qu'on aurait obtenues par interpolation dans le tableau 10.8.

Rang	Débit de pointe (m <sup>3</sup> /s)	Prob. (X > x) Weibull	Prob. (X > x) Loi normale	Rang	Débit de pointe (m <sup>3</sup> /s)	Prob. (X > x) Weibull	Prob. (X > x) Loi normale
1	2120	0,0164	0,0012	31	732	0,5082	0,6321
2	1950	0,0328	0,0043	32	728	0,5246	0,6358
3	1840	0,0492	0,0091	33	720	0,5410	0,6431
4	1760	0,0656	0,0152	34	715	0,5574	0,6476
5	1610	0,0820	0,0359	35	714	0,5738	0,6485
6	1560	0,0984	0,0466	36	701	0,5902	0,6602
7	1400	0,1148	0,0986	37	690	0,6066	0,6700
8	1375	0,1311	0,1096	38	680	0,6230	0,6787
9	1360	0,1475	0,1167	39	660	0,6393	0,6960
10	1310	0,1639	0,1423	40	630	0,6557	0,7210
11	1300	0,1803	0,1478	41	620	0,6721	0,7292
12	1190	0,1967	0,2183	42	615	0,6885	0,7332
13	1140	0,2131	0,2559	43	612	0,7049	0,7356
14	1090	0,2295	0,2965	44	600	0,7213	0,7450
15	1050	0,2459	0,3311	45	590	0,7377	0,7528
16	1030	0,2623	0,3489	46	580	0,7541	0,7604
17	1010	0,2787	0,3671	47	540	0,7705	0,7896
18	960	0,2951	0,4138	48	530	0,7869	0,7966
19	920	0,3115	0,4521	49	520	0,8033	0,8034
20	910	0,3279	0,4618	50	510	0,8197	0,8101
21	889	0,3443	0,4821	51	490	0,8361	0,8230
22	870	0,3607	0,5006	52	480	0,8525	0,8293
23	840	0,3770	0,5297	53	460	0,8689	0,8413
24	820	0,3934	0,5490	54	455	0,8852	0,8443
25	810	0,4098	0,5586	55	454	0,9016	0,8448
26	805	0,4262	0,5634	56	452	0,9180	0,8460
27	790	0,4426	0,5778	57	450	0,9344	0,8471
28	780	0,4590	0,5873	58	448	0,9508	0,8483
29	760	0,4754	0,6062	59	445	0,9672	0,8500
30	750	0,4918	0,6155	60	415	0,9836	0,8664

Tableau 10.3 Probabilités de dépassement avec la loi normale

## 10.6 Intervalle de confiance dans l'estimation des quantiles

Les quantiles calculés à l'aide de différentes fonctions de distribution de probabilité peuvent parfois présenter entre eux des écarts assez importants. Le choix a priori d'une distribution donnée s'accompagne donc systématiquement d'une incertitude sur l'estimation des quantiles. En plus de la visualisation graphique qui est traitée dans le paragraphe suivant, on peut utiliser des tests statistiques comme celui de Kolmogorof-Smirnov ou le test de Chi-carré pour juger l'adéquation d'une fonction de distribution donnée à représenter un échantillon (Llamas, 1993). Mais l'échantillon de données mesurées est souvent très limité. Considérer que les propriétés statistiques (moyenne, écart-type,

coefficient d'asymétrie) de cet échantillon sont celles de la population induit systématiquement une autre source d'erreur dans l'estimation des quantiles. Par ailleurs, les données mesurées de l'échantillon comportent toujours une incertitude et peuvent parfois être complètement erronées. Ceci se traduit par une incertitude supplémentaire dans l'estimation des quantiles. C'est pour ces raisons qu'une estimation d'un quantile est souvent accompagnée d'un intervalle de confiance. Cet intervalle indique, avec une certaine probabilité, la plage dans laquelle la véritable valeur du quantile peut se situer.

Ainsi l'intervalle de confiance avec la probabilité  $2\alpha$  se construit à partir de la relation suivante (Benjamin et Cornell, 1970):

$$\text{Prob}(F - KS \leq F \leq F + KS) = 1 - 2\alpha \quad (10.20)$$

où  $F$  est la probabilité de non dépassement estimée à partir de la distribution retenue,  
 $KS$  est la statistique de Kolgomorov-Smirnov fournie au tableau 10.4 en fonction de la taille de l'échantillon et du niveau de confiance  $\alpha$ . Ce paramètre  $KS$  exprime en quelque sorte la marge d'erreur sur l'estimation de  $F$ . Comme cette erreur peut être en excès ou en défaut, le niveau de confiance est de  $2\alpha$  dans la formule 10.20.

Taille de l'échantillon	$\alpha = 0,1$ (10%)	$\alpha = 0,05$ (5%)	$\alpha = 0,01$ (1%)
10	0,37	0,41	0,49
15	0,30	0,34	0,40
20	0,26	0,29	0,35
25	0,24	0,26	0,32
30	0,22	0,24	0,29
40	0,19	0,21	0,25
$N > 40$	$1,22/N^{0,5}$	$1,36/N^{0,5}$	$1,63/N^{0,5}$

Tableau 10.4 Valeurs de  $KS$  pour différents niveaux de confiance

On utilise dans le présent ouvrage cette approche simplifiée pour illustrer la notion d'intervalle de confiance. En réalité la valeur de  $KS$  dépend aussi de la période de retour et du type de distribution utilisée (Kite, 1977).



## 10.7 Présentation graphique des quantiles

La présentation graphique des données permet de juger visuellement d'une manière rapide l'adéquation d'une fonction de probabilité à représenter la population dont l'échantillon est issu. On peut montrer les données sur un graphique normal dans lequel l'axe des ordonnées représente les débits et l'axe des abscisses les probabilités de non dépassement. La présentation des données sur un papier spécial de probabilité offre un avantage visuel encore plus marqué.

En effet, la fonction théorique de distribution de probabilité est une droite sur ce papier. Plus les données de l'échantillon sont alignées sur cette droite, plus la fonction de distribution de probabilité est appropriée pour représenter la population dont l'échantillon est issu. La méthode de construction de tels papiers a été traitée en détail par Stedinger *et al.* (1993).

On décrit ci-après brièvement le principe de construction de tels papiers de probabilité. Soulignons d'abord qu'il existe un papier propre à chaque distribution de probabilité. Pour fabriquer ce papier, il faut d'abord choisir une formule pour calculer la probabilité empirique  $P_i = \text{Prob}(Q \geq Q_i)$ . Quoique la formule de Weibull soit la plus utilisée et donne d'une manière générale une estimation non biaisée, d'autres formules peuvent être plus appropriées pour certaines distributions. Dénotons par  $G$  la fonction de distribution retenue. La droite de la fonction de distribution théorique consiste à représenter  $G^{-1}(1 - P_i)$  en fonction de la variable centrée réduite correspondante  $Z$ . Les débits bruts observés sont représentés en ordonnées en fonction des valeurs  $Z$ .

Afin de faciliter l'usage des graphes, les valeurs de la variable centrée réduite  $Z$  sont remplacées par la probabilité de dépassement ou non dépassement correspondante. Les courbes qui représentent l'intervalle de confiance sont tracées à l'aide des valeurs  $G^{-1}(1 - P_i \pm KS)$  en fonction de  $Z$ . Quand l'argument de la fonction  $G^{-1}$  est supérieur à 1 ou négatif, les valeurs sont ignorées et ne sont pas représentées graphiquement.

La figure 10.7 montre l'ajustement d'une loi normale à la série de débits fournis au tableau 10.3. Il est clair sur cette figure que la loi normale s'ajuste mal aux quantiles de crue et particulièrement pour les valeurs extrêmes. Par ailleurs, toutes les valeurs observées du débit se trouvent à l'intérieur de l'intervalle de confiance à 90% tracé à l'aide de la relation 10.20. Le facteur  $KS$  a été calculé à l'aide de la formule  $KS = 1,36/N^{0,5} = 1,36/60^{0,5} = 0,175$ .

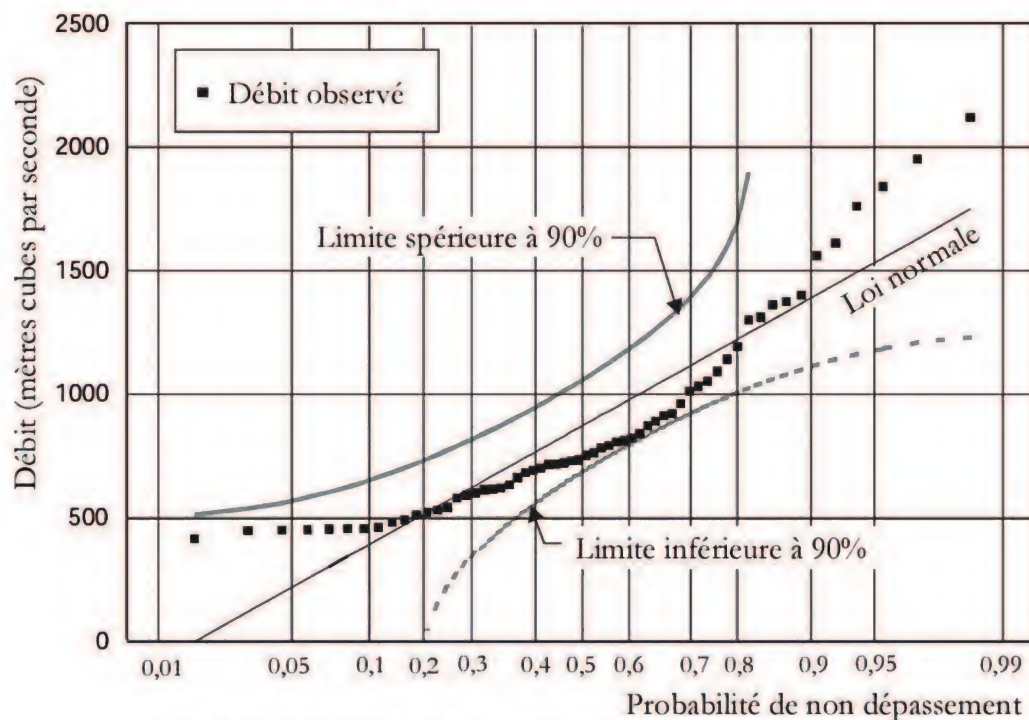


Fig. 10.7 Ajustement de la loi normale aux débits observés

## 10.8 La loi Log-normale

En hydrologie, les événements extrêmes obéissent à d'autres types de lois que la loi normale traitée précédemment. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on s'intéresse aux valeurs extrêmes, comme le débit maximum de crue observé durant toute l'année. Parmi les lois appropriées dans ce cas-là, on peut citer la loi Log-normale, la loi de Gumbel et la loi Log-Pearson.

La loi Log-normale a une expression presque identique à celle de la loi normale à une transformation logarithmique près. En effet, on peut lui donner la représentation suivante :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log(x) - M}{s} \right)^2} \quad (10.21)$$

où  $M$  est la moyenne des logarithmes de la variable  $x$ ,  $M = \frac{\sum_{i=1}^N \log(x_i)}{N}$

$S$  est l'écart-type des logarithmes de la variable  $x$ .



La formulation devient identique à celle de la loi normale quand on utilise la variable centrée réduite  $z$  :

$$z = \frac{\log(x) - M}{S} \quad (10.22)$$

La procédure d'utilisation de la loi Log-normale est identique à celle de la loi normale, mis à part qu'on doit procéder avant toute chose à une transformation logarithmique des données (logarithme népérien ou à base 10).

On calcule alors la moyenne  $M$  et l'écart-type  $S$  des données transformées. Une fois qu'on a exécuté les trois étapes pour trouver le logarithme du débit  $\log(Q_T)$  de période de retour  $T$  comme pour la loi normale, on doit utiliser une transformation inverse du type  $Q_T = 10^{\log(Q_T)}$  pour trouver le débit.

Inversement, la période de retour correspondant à un débit donné  $Q$  peut être calculée aussi selon la même procédure que celle utilisée pour la loi normale, en calculant le paramètre  $z$  à l'aide des données transformées :  $z = (\log Q - M)/S$ .

### ***Application 10.4***

On doit calculer le débit ayant une période de retour de 100 ans et trouver la période de retour associée au débit le plus élevé de l'échantillon fourni au tableau 10.1.

Après la transformation logarithmique des données, on calcule les paramètres de l'échantillon :

$$\frac{\sum \log(Q_i)}{N} = 2,8990 \quad S = 0,1845 \quad C_s = 0,5128$$

On constate que la transformation logarithmique a réduit sensiblement le coefficient d'asymétrie qui reste malgré tout non nul.

Comme pour la loi normale, le tableau 10.8 nous indique la valeur du paramètre  $z$  associée à la probabilité de non dépassement 0,99, soit  $z = 2,33$ .

On obtient :

$$\log(Q_{100}) = 2,8990 + 2,33 \cdot 0,1845 = 3,3289 \text{ et } Q_{100} = 2133 \text{ m}^3/\text{s}.$$



On voit que cette valeur est largement supérieure à celle obtenue avec la loi normale ( $1823\text{m}^3/\text{s}$ ). Il n'y a dans l'échantillon qu'une seule valeur de débit qui dépasse  $Q_{100}$ .

Le calcul de la période de retour associée à la valeur du débit  $Q = 2120\text{m}^3/\text{s}$  se fait en calculant

$$z = (3,3263 - 2,8990)/0,1845 = 2,316.$$

L'interpolation linéaire dans la table 10.8 fournit

$$F = 0,9897 \text{ et } T = 97 \text{ ans.}$$

Le tableau 10.5 indique les probabilités de dépassement obtenues analytiquement pour la loi Log-normale.

Rang	Débit de pointe ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Prob. ( $X > x$ ) Weibull	Prob. ( $X > x$ ) Log-norm.	Rang	Débit de Pointe ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Prob. ( $X > x$ ) Weibull	Prob. ( $X > x$ ) Log-norm.
1	2120	0,0164	0,0103	31	732	0,5082	0,5741
2	1950	0,0328	0,0170	32	728	0,5246	0,5792
3	1840	0,0492	0,0237	33	720	0,5410	0,5893
4	1760	0,0656	0,0302	34	715	0,5574	0,5957
5	1610	0,0820	0,0476	35	714	0,5738	0,5970
6	1560	0,0984	0,0555	36	701	0,5902	0,6136
7	1400	0,1148	0,0902	37	690	0,6066	0,6278
8	1375	0,1311	0,0973	38	680	0,6230	0,6407
9	1360	0,1475	0,1018	39	660	0,6393	0,6666
10	1310	0,1639	0,1184	40	630	0,6557	0,7054
11	1300	0,1803	0,1220	41	620	0,6721	0,7183
12	1190	0,1967	0,1693	42	615	0,6885	0,7247
13	1140	0,2131	0,1960	43	612	0,7049	0,7285
14	1090	0,2295	0,2266	44	600	0,7213	0,7437
15	1050	0,2459	0,2539	45	590	0,7377	0,7563
16	1030	0,2623	0,2686	46	580	0,7541	0,7687
17	1010	0,2787	0,2841	47	540	0,7705	0,8167
18	960	0,2951	0,3259	48	530	0,7869	0,8281
19	920	0,3115	0,3627	49	520	0,8033	0,8393
20	910	0,3279	0,3724	50	510	0,8197	0,8502
21	889	0,3443	0,3934	51	490	0,8361	0,8711
22	870	0,3607	0,4131	52	480	0,8525	0,8810
23	840	0,3770	0,4455	53	460	0,8689	0,8998
24	820	0,3934	0,4680	54	455	0,8852	0,9042
25	810	0,4098	0,4795	55	454	0,9016	0,9051
26	805	0,4262	0,4853	56	452	0,9180	0,9068
27	790	0,4426	0,5029	57	450	0,9344	0,9086
28	780	0,4590	0,5149	58	448	0,9508	0,9103
29	760	0,4754	0,5392	59	445	0,9672	0,9128
30	750	0,4918	0,5516	60	415	0,9836	0,9361

Tableau 10.5 Probabilités de dépassement (loi Log-normale)

La figure 10.8 montre le résultat de l'ajustement de la loi Log-normale aux débits observés. L'alignement des débits observés sur la droite de la distribution théorique est un bon indicateur de l'adéquation de la loi Log-normale à modéliser les quantiles de crue.

En comparant la figure 10.8 à la figure 10.7, il ressort clairement que la loi Log-normale s'ajuste mieux que la loi normale aux valeurs observées.

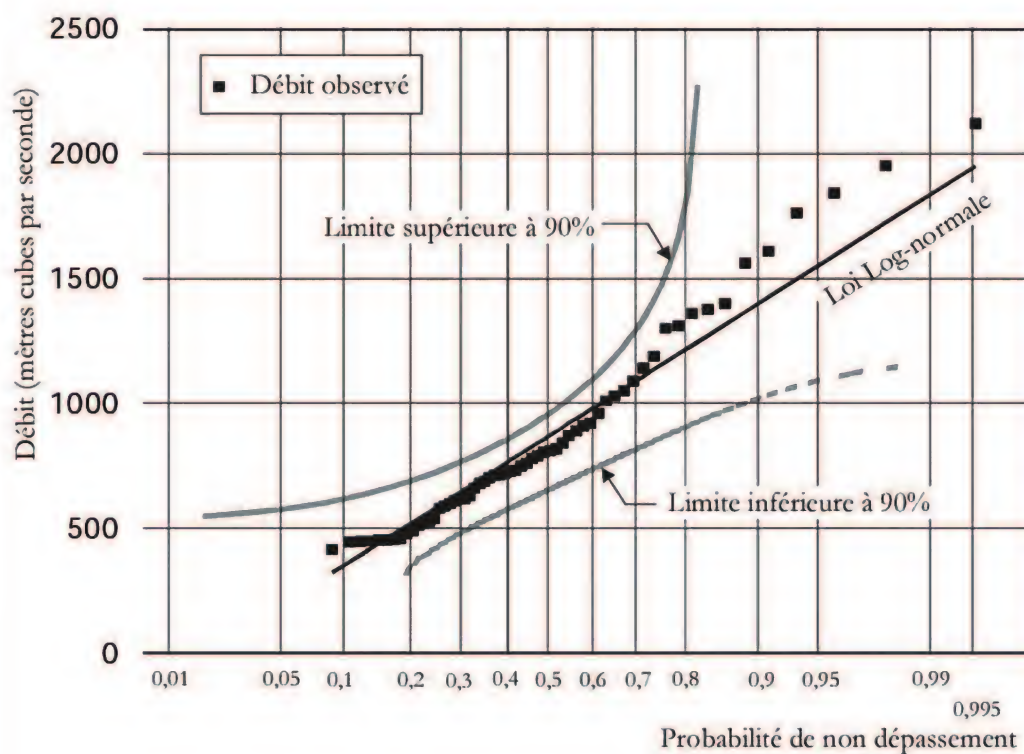


Fig. 10.8 Ajustement de la loi Log-normale aux débits observés

## 10.9 Distribution de Gumbel ou extrême de type 1

La fréquence cumulative de la distribution de Gumbel (1958) pour les valeurs extrêmes maximales a la forme de l'exponentielle double suivante :

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}} \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (10.23)$$

Pour les valeurs extrêmes minimales, cette fonction devient :

$$F(x) = 1 - e^{-e^{\alpha(x-u)}} \quad (10.24)$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $u$  peuvent être estimés à partir de la moyenne  $\bar{X}$  et de l'écart type  $\sigma$  de l'échantillon par les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1,2825}{\sigma} \quad (10.25)$$

$$u = \bar{X} - 0,45\sigma : \text{extrême maximal} \quad (10.26)$$

$$u = \bar{X} + 0,45\sigma : \text{extrême minimal} \quad (10.27)$$

Pour une période de retour donnée, le débit extrême maximal correspondant peut être estimé à partir de la relation :

$$Q_T = \bar{X} + K\sigma \quad (10.28)$$

où

$$K = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right] \right\} \quad (10.29)$$

Et

$$T = \frac{1}{1-F} \quad (10.30)$$

### 10.9.1 Procédure d'utilisation de la loi de Gumbel

Pour calculer la période de retour associée à un débit donné, on suit la procédure :

- 1- calculer la moyenne et l'écart-type,
- 2- calculer  $\alpha$  et  $u$  à l'aide de (10.25) et (10.26),
- 3- calculer  $F$  à l'aide de (10.23),
- 4- calculer la période de retour  $T$  à l'aide de la relation 10.30

Pour calculer le débit correspondant à une période de retour donnée, on doit :

- 1- calculer la moyenne et l'écart-type,
- 2- calculer  $K$  à l'aide de (10.29),
- 3- calculer  $Q_T$  à l'aide de (10.28).



### Application 10.5

On doit calculer le débit ayant une période de retour de 100 ans et trouver la période de retour associée au débit le plus élevé de l'échantillon fourni au tableau 10.1.

L'équation (10.29) permet de calculer la valeur de  $K$  pour le débit centenaire :

$$K = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right] \right\} = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{100}{99} \right) \right] \right\} = 3,14.$$

$$Q_{100} = \bar{Q} + K\sigma$$

Avec  $\bar{Q} = 870,58$  et  $\sigma = 416,62$ ,  $Q_{100} = 2159,22 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Cette valeur est voisine de celle obtenue à l'aide de la loi Log-normale ( $2133 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

Pour trouver la période de retour associée au débit  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$ , on calcule les paramètres  $\alpha$  et  $u$  à partir des équations (10.25) et (10.26) :

$$\alpha = 1,2825 / \alpha = 0,003123 \text{ et } u = \bar{Q} - 0,45\sigma = 685,8$$

L'équation (10.23) permet de calculer la probabilité de non dépassement du débit  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$ :

$$F = e^{-0,003123(2120-685,8)} = 0,9887$$

L'équation (10.30) permet ensuite de calculer la période de retour du débit  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$  :

$$T = \frac{1}{1-F} = \frac{1}{0,01128} = 88,69 \text{ ans}$$

Cette valeur est voisine de la période de retour de 97 ans obtenue à l'aide de la loi Log-normale.

Le tableau 10.6 indique les probabilités de dépassement obtenues analytiquement pour la loi de Gumbel.

Rang	Débit de pointe (m <sup>3</sup> /s)	Prob. (X>x) Weibull	Prob. (X>x) Gumbel	Rang	Débit de pointe (m <sup>3</sup> /s)	Prob. (X>x) Weibull	Prob. (X>x) Gumbel
1	2120	0,0164	0,0113	31	732	0,5082	0,5792
2	1950	0,0328	0,0191	32	728	0,5246	0,5838
3	1840	0,0492	0,0268	33	720	0,5410	0,5929
4	1760	0,0656	0,0343	34	715	0,5574	0,5986
5	1610	0,0820	0,0543	35	714	0,5738	0,5998
6	1560	0,0984	0,0631	36	701	0,5902	0,6147
7	1400	0,1148	0,1019	37	690	0,6066	0,6273
8	1375	0,1311	0,1097	38	680	0,6230	0,6388
9	1360	0,1475	0,1147	39	660	0,6393	0,6617
10	1310	0,1639	0,1327	40	630	0,6557	0,6959
11	1300	0,1803	0,1366	41	620	0,6721	0,7072
12	1190	0,1967	0,1871	42	615	0,6885	0,7128
13	1140	0,2131	0,2150	43	612	0,7049	0,7161
14	1090	0,2295	0,2465	44	600	0,7213	0,7294
15	1050	0,2459	0,2743	45	590	0,7377	0,7404
16	1030	0,2623	0,2892	46	580	0,7541	0,7513
17	1010	0,2787	0,3046	47	540	0,7705	0,7933
18	960	0,2951	0,3460	48	530	0,7869	0,8034
19	920	0,3115	0,3820	49	520	0,8033	0,8133
20	910	0,3279	0,3913	50	510	0,8197	0,8230
21	889	0,3443	0,4115	51	490	0,8361	0,8417
22	870	0,3607	0,4303	52	480	0,8525	0,8507
23	840	0,3770	0,4609	53	460	0,8689	0,8679
24	820	0,3934	0,4819	54	455	0,8852	0,8720
25	810	0,4098	0,4926	55	454	0,9016	0,8729
26	805	0,4262	0,4980	56	452	0,9180	0,8745
27	790	0,4426	0,5143	57	450	0,9344	0,8761
28	780	0,4590	0,5253	58	448	0,9508	0,8777
29	760	0,4754	0,5476	59	445	0,9672	0,8801
30	750	0,4918	0,5588	60	415	0,9836	0,9027

Tableau 10.6 Probabilités selon la loi de Gumbel

La figure 10.9 montre le résultat de l'ajustement de la loi de Gumbel aux débits observés.

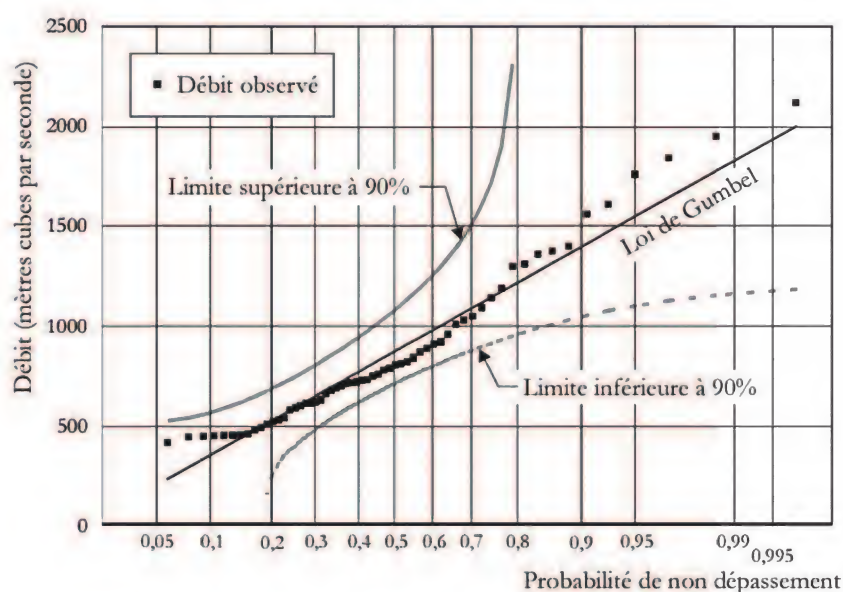


Fig. 10.9 Ajustement de la loi de Gumbel aux débits observés

Comme pour la loi Log-normale, l'alignement des débits observés sur la droite de distribution théorique est un bon indicateur de l'adéquation de la loi de Gumbel à modéliser les quantiles de crue pour cette rivière.

Cette distribution est souvent utilisée au Québec quand la série de données comporte moins que 25 années d'enregistrement.

### 10.10 Distribution Log-Pearson de type III (LP3)

Le principe d'utilisation de la loi Log-Pearson est identique à celui de la loi Log-normale exposé précédemment. La principale différence provient de la prise en compte du coefficient d'asymétrie  $C_s$  dans le calcul du facteur de fréquence  $K$  pour la loi Log-Pearson III (tableau 10.9 à la fin de ce chapitre).

Comme pour la distribution Log-normale, pour trouver le débit correspondant à une période de retour donnée, les étapes à suivre sont :

- 1- transformation logarithmique des débits maximum annuels,
- 2- calcul des paramètres de l'échantillon ainsi transformé : moyenne, écart-type et coefficient d'asymétrie,
- 3- calcul de la valeur de  $K$  à partir du tableau 10.9 pour une période de retour donnée,
- 4- utilisation de l'équation standard :

$$\log(Q) = M + K\sigma \quad (10.31)$$

- 5- Utilisation de la fonction anti-log pour trouver le débit  $Q$ .

Pour trouver la période de retour associée à un débit donné, on procède par les étapes suivantes :

- 1- transformation logarithmique des débits maximum annuels,
- 2- calcul des paramètres de l'échantillon ainsi transformé : moyenne, écart-type et coefficient d'asymétrie,
- 3- calcul de  $K = [\log(Q) - M]/\sigma$ ,
- 4- détermination de la probabilité  $P$  de dépassement qui correspond à la valeur de  $K$  dans le tableau 10.9,
- 5- calcul de la période de retour  $T = 1/P$ .



### Application 10.6

On doit calculer le débit ayant une période de retour de 100 ans et trouver la période de retour associée au débit le plus élevé de l'échantillon fourni au tableau 10.1.

Les propriétés de l'échantillon transformé ont déjà été calculées :

$$M = 2,8990 \quad \sigma = 0,1845 \quad C_s = 0,5127$$

Le coefficient d'asymétrie  $C_s$  doit être arrondi au dixième le plus proche; on utilise donc  $C_s = 0,5$ .

Le tableau 10.9 indique une valeur de  $K = 2,686$  pour le débit centenaire ( $p = 0,01$  et  $C_s = 0,5$ ). Ainsi :

$$\log(Q_{100}) = 2,8990 + 2,686 \cdot 0,1845 = 3,39 \text{ et } Q_{100} = 2481 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Cette valeur du débit centenaire est sensiblement supérieure aux valeurs fournies par les autres distributions. Compte tenu du fait que la présente loi est la seule qui prend en considération le coefficient d'asymétrie qui est en l'occurrence non nul, cette dernière valeur peut être considérée comme la plus plausible. L'utilisation de la distribution Log-Pearson dans ce cas permet une conception plus sécuritaire.

Pour calculer la période de retour associée au débit le plus élevé de l'échantillon ( $2120 \text{ m}^3/\text{s}$ ), on calcule le paramètre de fréquence  $K$  :

$$K = \frac{\log(2120) - 2,8990}{0,1845} = 2,3160$$

Le tableau 10.9 indique que pour  $C_s = 0,5$ , la probabilité de dépassement associée à  $K = 2,337$  est  $p = 0,01987$  (valeur obtenue par interpolation linéaire). La période de retour du débit  $2120 \text{ m}^3/\text{s}$  est par conséquent 50,3 ans.

La figure 10.10 montre le résultat de l'ajustement de la distribution Log-Pearson aux débits observés. On remarque que l'ajustement de cette distribution est moins bon que ceux de la loi Log-normale et de la loi de Gumbel.

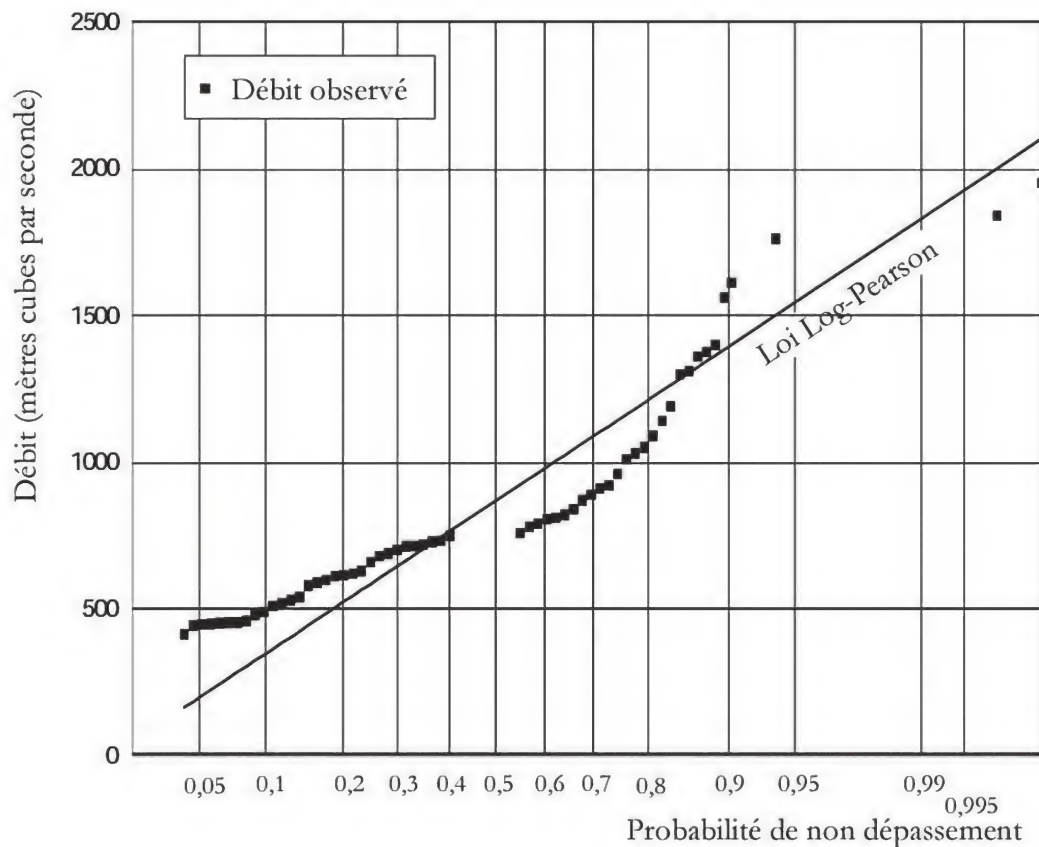


Fig. 10.10 Ajustement de la loi Log-Pearson aux débits mesurés

Cette distribution est la plus utilisée au Québec surtout quand la série de données comporte plus que 25 années d'enregistrement.

## 10.11 Autres fonctions de distribution

### 10.11.1 Introduction

On a vu dans les paragraphes précédents que lorsqu'on traite des phénomènes hydrologiques à long terme, aucune prévision déterministe n'est possible. La solution ne peut être formulée qu'en termes de risque toléré de la défaillance. L'approche statistique permet alors de prédire, moyennant une distribution de probabilité, le débit de conception correspondant à une période de retour choisie. Une des questions posées dans ce paragraphe concerne la probabilité d'occurrence d'un certain nombre de défaillances à l'intérieur d'une période.

### 10.11.2 Distribution binomiale

La distribution binomiale s'applique en hydrologie quand on a un événement avec deux possibilités : l'occurrence ( $p$ ) et la non-occurrence ( $1-p$ ). Ces possibilités sont complémentaires. La condition d'application de ce type de distribution binomiale est l'indépendance des observations. La loi binomiale s'énonce alors :

« Soit une série de  $n$  observations successives et indépendantes dont chacune peut être associée à l'occurrence ou non-occurrence d'un événement, avec les probabilités respectives  $p$  ou  $1-p$  ».

La probabilité d'avoir  $x$  occurrences en  $n$  observations est donnée par la relation

$$P(X = x) = C_n^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (10.32)$$

où

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq p < 1.$$

La probabilité complémentaire ( $1-p$ ) est souvent représentée par  $q$ .

La loi binomiale ne dépend que de  $n$  et de  $p$ . La moyenne d'une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale est  $\bar{X} = np$  et son écart type est  $\sigma = \sqrt{npq}$ .

#### ***Application 10.7***

Afin de protéger le chantier de construction d'un barrage, un batardeau a été construit pour résister à la crue de période de retour de 4 ans. La période de construction du barrage s'étend sur 7 ans.

1. Quel est le risque que le batardeau soit submergé une seule fois durant la construction?

$$P(X = 1) = C_7^1 p^1 q^{7-1} = 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0,31.$$

La probabilité est donc de 31%.

2. Quel est le risque que le batardeau soit submergé au moins une fois durant la construction?



$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = (1 - p)^n = q^n = (3/4)^7 = 0,13$$

Donc  $P(X \geq 1) = 1 - 0,13 = 0,87$

Il y a donc une probabilité de 87%.

3. Quelle est la probabilité que le batardeau ne soit jamais submergé durant la construction?

$P(X = 0) = (1 - p)^n = q^n$ . Calculé ci-haut : 0,13.

Cette probabilité est donc de 13%.

Le tableau 10.7 présente les formules utiles pour calculer différentes probabilités à l'aide de la loi binomiale.

PROBABILITÉ CHERCHÉE	CALCUL DE LA PROBABILITÉ ( $q = 1 - p$ )
Probabilité d'observer au plus $x$ occurrences en $n$ observations	$P(X \leq x) = \sum_{i=0}^x C_n^i p^i q^{n-i}$
Probabilité d'observer exactement $x$ occurrences en $n$ observations	$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ ou $P(X = x) = P(X \leq x) - P[X \leq (x-1)]$
Probabilité d'observer plus de $x$ occurrences en $n$ observations	$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$
Probabilité d'observer moins de $x$ occurrences en $n$ observations	$P(X < x) = P[X \leq (x-1)]$
Probabilité d'observer au moins $x$ occurrences en $n$ observations	$P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$
Probabilité d'observer une valeur de $x$ entre $x_1$ et $x_2$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P[X \leq (x_1 - 1)]$
Probabilité de n'observer aucune occurrence en $n$ observations	$P(X = 0) = (1 - p)^n = q^n$
Probabilité d'observer $n$ occurrences en $n$ observations	$P(X = n) = p^n$
Probabilité d'observer au moins 1 occurrence en $n$ observations	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^n$

Tableau 10.7 Probabilités pour distribution binomiale

### 10.11.3 Distribution géométrique

La distribution géométrique traite du même problème que la distribution binomiale, à la différence que cette fois la date d'occurrence a un rôle. Cette distribution s'écrit :

$$f(x, p) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3... \quad (10.33)$$

On peut interpréter la distribution géométrique comme étant la probabilité que l'événement ne se réalise pas durant  $(x - 1)$  périodes successives (ce dont la probabilité est de  $[1 - p]^{x-1}$ ), puis se réalise à la  $x^{\text{ième}}$  période (ce dont la probabilité est  $p$ ).

À l'instar de la loi binomiale, la distribution géométrique présuppose l'indépendance entre les réalisations.

#### ***Application 10.8***

Quelle est la probabilité que le batardeau de l'exemple précédent soit submergé pendant la troisième année des travaux de construction du barrage?

Ici,  $x = 3$  et  $p = 1/4$ . D'après l'équation (10.33),  $f(3, 1/4) = 1/4 (3/4)^{3-1} = 0,14$ .

La probabilité est donc de 14%.

## RÉSUMÉ

- 1- Le risque hydrologique est la probabilité de dépassement  $[P(Q > Q_T)]$  d'une valeur critique de débit  $Q_T$  et de période de retour  $T$ .

$$\text{risque} = P(\text{débit} \geq Q_T) = 1/T$$

$$\text{fiabilité} = P(\text{débit} < Q_T) = 1 - 1/T$$

- 2- Pour déterminer le débit  $Q_T$  correspondant à une période de retour  $T$ , on utilise la forme générale suivante :

$$Q_T = \bar{Q} + K_T \sigma$$

où  $K_T$  est un paramètre de fréquence propre à chaque fonction de distribution de probabilité (tableau 10.8 pour la loi normale et de Galton, formule (10.23) pour la distribution de Gumbel ou extrême de type I et tableau 10.9 pour la distribution log-Pearson de type III).

- 3- Pour déterminer la période de retour  $T$  correspondant à un débit donné  $Q_T$ , on utilise l'équation suivante :

$$K_T = \frac{Q_T - \bar{Q}}{\sigma}$$

La connaissance de  $K_T$  permet de calculer la probabilité de dépassement, donc la période de retour, en utilisant les mêmes tables que dans le cas précédent.

- 4- L'intervalle de confiance au niveau  $1 - 2\alpha$  se construit à partir de la relation :

$$\text{Prob} (F - KS \leq F \leq F + KS) = 1 - 2\alpha$$

où  $KS$  est la statistique de Kolmogorov Smirnov fournie au tableau 10.4; elle représente l'erreur sur l'estimation de  $F$  avec un niveau de confiance  $\alpha$ .



## EXERCICES

### Exercice 10.1

Une rivière possède trente années d'observation des débits maximum annuels. Les propriétés statistiques de ces données sont :  $\bar{Q} = 940 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\sigma = 425 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Déterminer les débits de période de retour 20 et 100 ans, en utilisant la distribution de Gumbel.

### Exercice 10.2

On a enregistré les débits annuels maximum d'une rivière de 1975 à 2003 inclusivement. La moyenne des logarithmes des débits est  $M = 2,95$ . L'écart type des logarithmes des débits est  $S = 0,25$ . Le coefficient d'asymétrie est  $C_s = 1,02$ .

Calculer les débits de périodes de retour 20, 50 et 100 à l'aide des distributions Log-normale et Log-Pearson.

### Exercice 10.3

On a enregistré la séquence de débits journaliers maximum pour 33 années consécutives.

Années	Débit annuel (m <sup>3</sup> /s)	Années	Débit annuel (m <sup>3</sup> /s)	Années	Débit annuel (m <sup>3</sup> /s)
1	185,0	12	320,0	23	180,0
2	85,0	13	156,0	24	242,0
3	168,0	14	144,5	25	347,5
4	82,5	15	284,0	26	202,0
5	180,0	16	253,0	27	285,5
6	550,0	17	102,0	28	520,0
7	128,5	18	406,0	29	870,0
8	224,5	19	128,5	30	356,5
9	359,0	20	270,5	31	57,0
10	80,0	21	242,0	32	400,0
11	158,5	22	96,0	33	74,0

Il faut calculer les débits de périodes de retour de 10 ans, 50 ans et 100 ans avec la loi normale, Log-normale, Log-Pearson et Gumbel, ensuite comparer et proposer la distribution la plus appropriée. La présentation graphique des ajustements des différentes distributions doit inclure l'intervalle de confiance à 90%.

### Exercice 10.4

Un batardeau temporaire a été construit pour protéger un chantier sur une durée de 5 ans. Ce batardeau doit résister à une crue de 200 ans.

Quelle est la probabilité que le chantier soit submergé

- au moins une fois en 5 ans?
- au cours d'une année quelconque?
- au cours de la troisième année seulement?
- aucune fois durant les 5 ans?

**Exercice 10.5**

La capacité d'un évacuateur de crues, qui est de  $540\text{m}^3/\text{s}$ , fut dépassée 3 fois au cours des 50 dernières années.

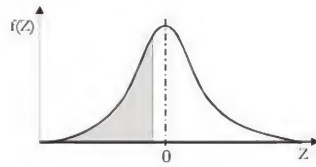
Il faut déterminer :

- a) la période de retour du débit de  $540\text{m}^3/\text{s}$ ,
- b) la probabilité que la capacité de l'évacuateur soit dépassée l'an prochain,
- c) la probabilité de non dépassement de la capacité l'an prochain
- d) la probabilité d'au moins un dépassement au cours des cinq prochaines années,
- e) la probabilité d'avoir au plus trois dépassements au cours des 50 prochaines années,
- f) la probabilité d'avoir exactement trois dépassements au cours des 50 prochaines années.

**Exercice 10.6**

- 1) Il y a combien de chance d'avoir une crue centenaire la prochaine année?
- 2) Il y a combien de chance d'avoir une crue centenaire pendant les 100 prochaines années?
- 3) Il y a combien de chance d'avoir une crue millénaire pendant les mille prochaines années?
- 4) Que faut-il conclure?

**Tableau 10.8 Probabilité de non dépassement**  
**Distribution normale**  
**( $Z < 0$ )**



Distribution normale centrée réduite.:

$$\int_{-\infty}^Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad Z = \frac{Q - \bar{Q}}{\sigma} \quad (Q = \sigma Z + \bar{Q})$$

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3	<b>0,0013</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0011</b>	<b>0,0010</b>	<b>0,0010</b>
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2	<b>0,0228</b>	<b>0,0222</b>	<b>0,0217</b>	<b>0,0212</b>	<b>0,0207</b>	<b>0,0202</b>	<b>0,0197</b>	<b>0,0192</b>	<b>0,0188</b>	<b>0,0183</b>
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1	<b>0,1587</b>	<b>0,1562</b>	<b>0,1539</b>	<b>0,1515</b>	<b>0,1492</b>	<b>0,1469</b>	<b>0,1446</b>	<b>0,1423</b>	<b>0,1401</b>	<b>0,1379</b>
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641





Tableau 10.9 Probabilité de non dépassement

## Distribution log-Pearson III

## Valeurs de K

C <sub>s</sub>	Probabilité de non dépassement						
	0,01	0,1	0,5	0,9	0,98	0,99	0,995
3,0	-0,667	-0,660	-0,396	1,180	3,152	4,051	4,970
2,5	-0,799	-0,771	-0,360	1,250	3,048	3,845	4,652
2,0	-0,990	-0,895	-0,307	1,302	2,912	3,605	4,298
1,5	-1,256	-1,018	-0,240	1,333	2,743	3,330	3,910
1,2	-1,449	-1,086	-0,195	1,340	2,626	3,149	3,661
1,0	-1,588	-1,128	-0,164	1,340	2,542	3,022	3,489
0,9	-1,660	-1,147	-0,148	1,339	2,498	2,957	3,401
0,8	-1,733	-1,166	-0,132	1,336	2,453	2,891	3,312
0,7	-1,806	-1,183	-0,116	1,333	2,407	2,824	3,223
0,6	-1,880	-1,200	-0,099	1,328	2,359	2,755	3,132
0,5	-1,955	-1,216	-0,083	1,323	2,311	2,686	3,041
0,4	-2,029	-1,231	-0,066	1,317	2,261	2,615	2,949
0,3	-2,104	-1,245	-0,050	1,309	2,211	2,544	2,856
0,2	-2,178	-1,258	-0,033	1,301	2,159	2,472	2,763
0,1	-2,252	-1,270	-0,017	1,292	2,107	2,400	2,670
0	-2,326	-1,282	0,000	1,282	2,054	2,326	2,576
-0,1	-2,400	-1,292	0,017	1,270	2,000	2,252	2,482
-0,2	-2,472	-1,301	0,033	1,258	1,945	2,178	2,388
-0,3	-2,544	-1,309	0,050	1,245	1,890	2,104	2,294
-0,4	-2,615	-1,317	0,066	1,231	1,834	2,029	2,201
-0,5	-2,686	-1,323	0,083	1,216	1,777	1,955	2,108
-0,6	-2,755	-1,328	0,099	1,200	1,720	1,880	2,016
-0,7	-2,824	-1,333	0,116	1,183	1,663	1,806	1,926
-0,8	-2,891	-1,336	0,132	1,166	1,606	1,733	1,837
-0,9	-2,957	-1,339	0,148	1,147	1,549	1,660	1,749
-1,0	-3,022	-1,340	0,164	1,128	1,492	1,588	1,664
-1,2	-3,149	-1,340	0,195	1,086	1,379	1,449	1,501
-1,5	-3,330	-1,333	0,240	1,018	1,217	1,256	1,282
-2,0	-3,605	-1,302	0,307	0,895	0,980	0,090	0,995
-2,5	-3,845	-1,250	0,360	0,771	0,798	0,799	0,800
-3,0	-4,051	-1,180	0,396	0,660	0,666	0,667	0,667

**OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 10**

Benjamin, J.R. et Cornell, C.A. (1970), *Probability Statistics and Decision for Civil Engineers*, New York, McGraw-Hill Book Company, p. 661.

Chow, V.T. (1951), «A General Formula for Hydrologic Frequency Analysis», *Trans. Am. Geophys. Union*, vol. 32, p. 231-237.

Gumbel, E.J. (1958), *Statistics of Extremes*, New York, Columbia University Press.

Kite, G.W. (1977), «Frequency and Risk Analysis in Hydrology», *Water Resources Publications*, Littleton, Colorado.

Llamas, J. (1993), *Hydrologie générale – principes et applications*, 2<sup>e</sup> éd., Montréal, Gaëtan Morin éditeur.

Stedinger, J.R., Vogel, R.M. et Foufoula-Georgio, E. (1993), «Frequency Analysis of Extreme Events», *Handbook of Hydrology*, New York, McGraw-Hill inc., p. 18-23.

Viessman, W.J. et Lewis, G. (1996). *Introduction to Hydrology*, 4<sup>e</sup> éd., Londres, Harper Collins College Publishers, p. 710.



## SYMBOLES DU CHAPITRE 10

$a, b, c$	: constantes
$C_s$	: coefficient d'asymétrie
$f$	: fonction
$F$	: fonction, probabilité de non dépassement
$G$	: fonction de distribution
$K$	: paramètre de fréquence
$KS$	: statistique de Kolgomorov-Smirnov
$K_T$	: paramètre de fréquence d'une période de retour $T$
$m$	: rang d'une valeur d'une série
$M$	: moyenne d'une variable logarithmique
$n$	: nombre d'années
$N$	: nombre de valeurs dans une série
$p, P$	: probabilité
$Q$	: débit
$Q_T$	: débit avec période de retour $T$
$S$	: écart-type d'une variable logarithmique
$T$	: période de retour
$u$	: paramètre de Gumbel
$x, X$	: variable
$z$	: variable centrée réduite d'une variable logarithmique
$Z$	: variable centrée réduite, variable aléatoire
$\alpha$	: niveau de confiance
$\sigma$	: écart-type

# **SOLUTIONS DES EXERCICES**

## EXERCICES DU CHAPITRE 1

### Exercice 1.1

Vitesse dans (1)

Équation de continuité entre (1) et (2) :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 \Rightarrow V_1 \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} = V_2 \cdot \pi \cdot \frac{D_2^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 \cdot \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow V_1 = 1 \cdot \left( \frac{60}{20} \right)^2 = 9 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow V_1 = 9 \text{ m/s}$$

Vitesse dans (3) :

Équation de continuité entre (2) et (3) :

$$Q_2 = Q_3 \Rightarrow V_2 \cdot A_2 = V_3 \cdot A_3 \Rightarrow V_3 = V_2 \cdot \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2$$

$$V_3 = 1 \cdot \left( \frac{60}{40} \right)^2 = 2,25 \text{ m/s}$$

$$V_3 = 2,25 \text{ m/s}$$

### Exercice 1.2

a) Équation de conservation de masse du réservoir :

$$\frac{dv}{dt} = (Q_{E_1} + Q_{E_2}) - Q_s$$

$$v = A \cdot h \quad \text{avec } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$



$$A \frac{dh}{dt} = (Q_{E1} + Q_{E2}) - Q_s$$

$$Q_s = V_s \cdot A_s = \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Soit :

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \left( \frac{dh}{dt} \right) = Q_{E1} + Q_{E2} - \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi D^2} (Q_{E1} + Q_{E2}) - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2gh}$$

b) Hauteur finale d'équilibre  $\longrightarrow \frac{dh}{dt} = 0$

$$\rightarrow \sqrt{h} = \frac{4(Q_{E1} + Q_{E2})}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2g}}$$

$$h = \left[ \frac{4 \cdot (5 + 6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,6)^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{0,05}{0,6} \right)^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \right]^2 = 1,60 \text{ m}$$

c)  $\left( \frac{dh}{dt} \right)_{h=1,5 \text{ m}} = \frac{4(5+6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,6^2} - \left( \frac{0,05}{0,6} \right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5}$

$$\boxed{\left( \frac{dh}{dt} \right)_{h=1,5 \text{ m}} = 0,00123 \text{ m/s} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}}$$

Le plan d'eau monte à une vitesse de  $1,23 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$ .

d)  $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot D^2} (Q_{E1} + Q_{E2}) - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2gh}$

Si  $Q_{E1} = Q_{E2} = 0$ , on trouve le temps pour que le niveau baisse de  $h_0 = 1,5 \text{ m}$  à  $h_1 = 0,5 \text{ m}$  :

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh} \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} dt$$

$$\rightarrow 2\left[h^{1/2}\right]_{h_0}^{h_1} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} [t]_0^T$$

$$\rightarrow 2\left[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}\right] = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} T \rightarrow T = -\frac{2\left[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}\right]}{\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}}$$

$$T = -\frac{2\left[0,5^{1/2} - 1,5^{1/2}\right]}{\left(\frac{5}{60}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 33,66 \text{ s}$$

$$\boxed{T = 33,66 \text{ s}}$$

Si  $Q_{E1} = 5 \text{ l/s}$  et  $Q_{E2} = 6 \text{ l/s}$ , on trouve le temps pour que le niveau monte de  $h_0=0,5\text{m}$  à  $h_1=1,5\text{m}$  :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4(0,005 + 0,006)}{\pi \cdot 0,60^2} - \left(\frac{5}{60}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \sqrt{h}$$

$$dt = \frac{dh}{0,0389 - 0,0308\sqrt{h}}$$

En intégrant par méthode numérique de  $h=0,5\text{m}$  à  $h=1,5\text{m}$  :

$$T = 1830\text{s}$$

### Exercice 1.3

Réservoir 1 :

$$\text{Charge hydraulique à la sortie : } h_1 = 5,00\text{m} - 0,50\text{m} - 0,15\text{m} = 4,35\text{m}$$

$$\text{Aire de sortie : } A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,30^2}{4} = 0,071\text{m}^2$$

$$\text{Vitesse de sortie : } V_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,35} = 9,238 \text{ m/s}$$

$$\text{Débit de sortie : } Q_1 = A_1 \cdot V_1 = 0,071 \text{ m}^2 \cdot 9,238 \text{ m/s} = 0,656 \text{ m}^3/\text{s}$$

Réservoir 2 :

$$\text{Charge hydraulique à la sortie : } h_2 = 4,00 \text{ m} - 0,50 \text{ m} - 0,10 \text{ m} = 3,40 \text{ m}$$

$$\text{Aire de sortie : } A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,20^2}{4} = 0,031 \text{ m}^2$$

$$\text{Vitesse de sortie : } V_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3,40} = 8,167 \text{ m/s}$$

$$\text{Débit de sortie : } Q_2 = A_2 V_2 = 0,031 \text{ m}^2 \cdot 8,167 \text{ m/s} = 0,253 \text{ m}^3/\text{s}$$

Par conséquent, le débit du trop plein est :

$$Q_1 - Q_2 = 0,656 \text{ m}^3/\text{s} - 0,253 \text{ m}^3/\text{s} = 0,403 \text{ m}^3/\text{s}$$

### Exercice 1.4

$$1\text{- Selon l'équation de continuité : } \frac{dS}{dt} = Q_E - Q_S$$

$$Q_E = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_S = 543 + 20 + 1 + 2 = 566 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Donc : } \frac{dS}{dt} = 1000 \text{ m}^3/\text{s} - 566 \text{ m}^3/\text{s} = 434 \text{ m}^3/\text{s}$$

Le stockage en 24 heures est :

$$S = 434 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 24 \text{ h} \cdot 60 \text{ min}/\text{h} \cdot 60 \text{ s}/\text{min} = 37,498 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

La variation journalière du niveau est donc :

$$\Delta h = S/A = 37,498 \cdot 10^6 \text{ m}^3 / 50,0 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 0,750 \text{ m}$$

$$2\text{- Volume à remplir : } V = (205 \text{ m} - 160 \text{ m}) \cdot 10,0 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 2250 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Le temps de remplissage est donc :

$$\Delta t = 2250 \cdot 10^6 \text{ m}^3 / 434 \text{ m}^3/\text{s} = 5,184 \cdot 10^6 \text{ s}$$

soit 60 jours



**Exercice 1.5**

a) Temps de vidange :  $S = (Q_P - Q_A) t_1$  donc  $t_1 = \frac{S}{Q_P - Q_A}$

b) Temps de remplissage :  $S = Q_A t_2$  donc  $t_2 = \frac{S}{Q_A}$

c) Durée d'un cycle :  $t_t = t_1 + t_2 = \frac{S}{Q_P - Q_A} + \frac{S}{Q_A} = \frac{S \cdot Q_P}{(Q_P - Q_A) \cdot Q_A} = S \left[ \frac{1}{Q_A} + \frac{1}{Q_P - Q_A} \right]$

d) Fréquence :  $f = \frac{1}{t_t} = \frac{(Q_P - Q_A) Q_A}{S Q_P}$

e)  $\frac{\delta f}{\delta Q_A} = \frac{1}{S} - \frac{2Q_A}{S Q_P}$ . La fréquence est maximum quand cette dérivée est nulle :

Donc :  $\frac{1}{S} - \frac{2Q_A}{S Q_P} = 0$  et  $Q_A = \frac{Q_P}{2}$

donc  $Q_A = 0,50 \text{ l/s}$

f) De d), avec  $Q_P = 1 \text{ litre/seconde}$ ,  $f_{\max} = \frac{\left( Q_P - \frac{Q_P}{2} \right) \cdot \frac{Q_P}{2}}{S \cdot Q_P} = \frac{Q_P}{4S} = \frac{0,25}{S} \text{ par seconde}$

g) Pour une durée de 15 minutes entre deux démarrages, la fréquence de démarrage est

$1/15 \text{ min}$  ou  $1/900 \text{ s}$ . Donc  $\frac{Q_P}{4 \cdot S} = \frac{1}{900 \text{ s}}$  donc  $S = \frac{1 \text{ l/s} \cdot 900 \text{ s}}{4} = 225 \text{ litres}$ .

## EXERCICES DU CHAPITRE 2

## Exercice 2.1

Le volume  $S$  du réservoir est constant, donc  $\frac{\delta S}{\delta t} = Q_E - Q_2 = 0$

$$\Rightarrow Q_E = Q_2 = V_2 \times \frac{\pi D^2}{4}$$

Pour calculer la vitesse de sortie appliquons Bernoulli entre les points 1 et 2

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12}$$

$$V_1 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0 \quad \text{donc :}$$

$$(Z_1 - Z_2) = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12} - 1 = 0 \quad (1)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4Q_2}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi \cdot 0,05^2} Q_2 = 509,3 Q_2 \quad (2)$$

$$\Delta H_{12} = h_f (\text{frottement}) + h_s (\text{perte sing.})$$

$$h_f (\text{Darcy-Weissbach}) = 0,0827 \times 0,02 \times 3 \times \frac{Q_2^2}{(0,05)^5} = 15878 Q_2^2$$

$$h_s = K \frac{V_2^2}{2g} = (2 \cdot 0,75 + 0,5) \cdot \frac{(509,3 \cdot Q_2)^2}{2 \cdot 9,81} = 26441 Q_2^2$$

$$\Delta H_{12} = 15878 Q_2^2 + 26441 Q_2^2 = 42319 Q_2^2$$

$$\text{Selon (1) : } 13220,3 Q_2^2 + 42319 Q_2^2 = 1$$

$$Q_2 = Q_E = 4,2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\text{Utilisant } Q_2 \text{ dans (2) : } V_2 = 509,3 \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} = 2,16 \text{ m/s}$$

b) Équation de continuité :  $A \frac{dh}{dt} = Q_E - Q_2$

Bernoulli entre A et le point 2 :

$$H_A = H_2 + \text{pertes}$$

$$\text{pertes} = h_s (\text{coude}) + h_f (\text{frottement})$$

$$h_s = K_c \frac{V^2}{2g} = 0,75 \cdot \frac{2,16^2}{2 \cdot 9,81} = 0,178 m$$

$$L = 1 + 0,5 + \frac{0,25}{2} = 1,625 m$$

$$h_f = 0,0827 fL \frac{Q^2}{d^5} = 0,0827 \cdot 0,2 \cdot 1,625 \cdot \frac{(4,2 \cdot 10^{-3})^2}{0,05^5} = 0,1517 m$$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_s + h_f$$

$$\text{où } V_A = V_2 = V \text{ et } P_2 = 0$$

En prenant le point 2 pour référence de cote :  $Z_2 = 0$  et  $Z_A = 1,5 m$

$$1,5 + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} + h_s + h_f$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = h_s + h_f - 1,5$$

$$P_A = \rho g (h_s + h_f - 1,5) = 1000 \cdot 9,81 \cdot (0,178 + 0,1517 - 1,5) = -11470 Pa$$

$$\boxed{P_A = -11,48 kPa}$$



c) Bernoulli entre points 1 et B :

$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_B}{\rho g} + Z_B + \frac{V_B^2}{2g} + h_s + h_f$$

$$\text{Où } V_B = V \text{ et } \frac{V_1^2}{2g} = 0, y_1 = y_B, P_1 = P_{\text{ain}} = 0$$

$$\text{Donc : } 0 = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + h_s + h_f$$

$$P_B = -\rho g \left( \frac{V^2}{2g} + h_s + h_f \right)$$

$$h_s = 0,50 \cdot \frac{2,16^2}{2 \cdot 9,81} = 0,119m$$

$$h_f = 0,0827 \cdot 0,020 \cdot 0,75 \cdot \frac{(4,2 \cdot 10^{-3})^2}{0,05^5} = 0,070m$$

$$P_B = -1000 \cdot 9,81 \cdot \left( \frac{2,16^2}{2 \cdot 9,81} + 0,119 + 0,070 \right) = -4,19 kPa$$

$$\boxed{P_B = -4,19 kPa}$$

d) Négligeant les pertes :  $\begin{cases} H_A = H_2 \\ H_B = H_1 \end{cases}$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} = 0; \quad \text{donc } P_A = -\rho g Z_A = -1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 = -14,72 kPa$$

$$\begin{cases} P_A = -14,72 kPa \\ P_B = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Erreur sur } P_A : \frac{-14,72 - (-11,48)}{-11,48} = 0,28 \rightarrow \boxed{28\%} \\ \text{Erreur sur } P_B : \frac{0 - 4,2}{4,2} = -1 \quad \boxed{100\%} \end{array} \right.$$

Hypothèse non raisonnable car les erreurs sont excessives et  $P_B$  ne peut pas être zéro.

### Exercice 2.2

$$1) \quad \epsilon / d = \frac{0,16}{205} = 7,8 \cdot 10^{-4} \quad 10^{-6} < \frac{\epsilon}{d} < 10^{-2}$$

Calcul du nombre de Reynolds (Re) :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,205^2}{4} = 0,033 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,033 \text{ m}^3 / \text{s}}{0,033 \text{ m}^2} = 1,0 \text{ m/s}$$

$$\nu = 1,520 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \quad \text{à } 5^\circ\text{C (tableau 2.1)}$$

$$\text{Selon l'équation (2.22) :} \quad R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,205}{1,52 \cdot 10^{-6}} = 1,349 \cdot 10^5$$

$$5 \cdot 10^3 < R_e < 10^8$$

Selon (2.23a) :

$$f = 0,0055 \left[ 1 + \left[ 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{\epsilon}{d} + \frac{10^6}{R_e} \right]^{1/3} \right]$$

$$f = 0,0055 \left[ 1 + \left[ 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,16}{205} + \frac{10^6}{1,349 \cdot 10^5} \right]^{1/3} \right] = 0,0213$$

Perte de charge sur 1000 m (Darcy-Weissbach, équation 2.21) :

$$h_f = 0,0827 \cdot f \cdot L \cdot \frac{Q^2}{d^5}$$

$$h_f = 0,0827 \cdot 0,0213 \cdot 1000 \cdot \frac{(33 \cdot 10^{-3})^2}{(0,205)^5} = 5,30 \text{ m}$$

2) Formule de Hazen-Williams (2.26) :

$$h_f = 10,675 L \left( \frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

$$C_{HW}^{1,852} = \frac{10,675 L \cdot Q^{1,852}}{h_f \cdot D^{4,87}}$$

$$C_{HW} = \left[ \frac{10,675 \cdot 1000 \cdot 0,033^{1,852}}{5,30 \cdot 0,205^{4,87}} \right]^{1/1,852} = 129,5$$

$$\boxed{C_{HW} = 129,5}$$

### Exercice 2.3

1) Bernoulli entre le plan d'eau (point 1) et (B) :

$$H_1 = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \text{pertes}$$

Pertes = perte singulière à l'entrée ( $h_s$ ) + perte de frottement ( $h_f$ )

$$h_s = K \frac{V^2}{2g} \text{ avec } K = 0,50 \text{ (figure 2.9)}$$

$$\text{Selon Darcy-Weissbach (2.21) : } h_f = 0,0827 \cdot f \cdot L \frac{Q^2}{D^5} = f \cdot \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

(N.B. : la seconde forme de 2.21 est obtenue en utilisant  $Q=AV=(\pi D^2/4)V$ , avec les valeurs numériques de  $\pi$  et de  $g$ ).

$$e = 0,12 \text{ mm} \rightarrow \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,12}{600} = 2 \cdot 10^{-4} \quad 10^{-6} < \frac{\varepsilon}{D} < 10^{-2}$$

Selon le tableau 2.1,  $\nu = 1,142 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



$$H_1 = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} 0,0055 \left[ 1 + \left( 2 \cdot 10^4 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{10^6 \nu}{V \cdot d} \right)^{1/3} \right]$$

$$\rightarrow 20 = 18 + \frac{V^2}{2 \cdot 9,81} \left[ 1 + 0,50 + \frac{2000}{0,6} \cdot 0,0055 \left[ 1 + \left( 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,12}{600} + \frac{10^6 \cdot 1,142 \cdot 10^{-6}}{V \cdot 0,6} \right)^{1/3} \right] \right]$$

$$\rightarrow 2 = \frac{V^2}{19,62} \left[ 19,83 + 18,33 \left( 4 + \frac{1,90}{V} \right)^{1/3} \right]$$

Par itérations successives, on obtient :  $V = 0,856 \text{ m/s}$

$$Q = V \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 0,856 \cdot 3,14 \cdot \frac{0,6^2}{4} = 0,242 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\boxed{Q = 0,242 \text{ m}^3 / \text{s}}$$

## Exercice 2.4

- 1) Puissance de la turbine (équation 2.16) :  $P = g\rho QH_T$   
Avec un rendement de 70% :

$$P = 0,7 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot H_T = 6867 \cdot H_T$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,1}{300} = 3,3 \cdot 10^{-4}$$

D'après le tableau 2.1,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  à  $20^\circ\text{C}$ .

D'après (2.22), le nombre de Reynolds est :

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 1}{\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}} = 4,24 \cdot 10^6$$

Selon le diagramme de Moody,  $f = 0,015$

Bernoulli entre le début de la conduite et la turbine (avec  $K=0,04$  pour prise d'eau arrondie) :

$$H_T = 60 - 0,0827 \frac{Q^2}{D^4} (1 + 0,04) - 0,0827 f \cdot L \cdot \frac{Q^2}{D^5}$$

$$H_T = 60 - \frac{0,0827 \cdot 1^2 \cdot 1,04}{0,3^4} - 0,0827 \cdot 0,015 \cdot 50 \cdot \frac{1^2}{0,3^5} = 23,85m$$

$$P = 6867 \cdot H_T = 6867 \cdot 23,85 = 163826 \text{ W} = 163,8 \text{ kW}$$

$$\text{recette annuelle} = 4 \times 10^{-2} \times 24 \times 365 \times 163,8 = 57396\$$$

### Exercice 2.5

D'après Hazen-Williams (2.40) :

$$h_f = L \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$$

Choissant (tableau 2.3) :

$$C_{HW} = 100$$

D'après les données,  $h_f = 3 \text{ m}/1000 \text{ m}$

$$D = \left[ L \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{hf} \right]^{1/4,87}$$

$$D_{AB} = \left[ 1000 \left[ \frac{3,59}{100} \right]^{1,852} \cdot \frac{(40 \cdot 10^{-3})^{1,852}}{3} \right]^{1/4,87} = 0,273m$$

$$\boxed{D_{AB} = 0,273m}$$

$$D_{BC} = \left[ 1000 \left( \frac{3,59}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{(30 \cdot 10^{-3})^{1,852}}{3} \right]^{1/4,87} = 0,245m$$

$$\boxed{D_{BC} = 0,245m}$$

$$D_{CD} = \left[ 1000 \left( \frac{3,59}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{(20 \cdot 10^{-3})^{1,852}}{3} \right]^{1/4,87} = 0,21m$$

$$\boxed{D_{CD} = 0,21m}$$

$$D_{DE} = \left[ 1000 \left( \frac{3,59}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{(10 \cdot 10^{-3})^{1,852}}{3} \right]^{1/4,87} = 0,161m$$

$$\boxed{D_{DE} = 0,161m}$$

### Exercice 2.6

Le long de la conduite :

$$H_1 + H_p - h_f - h_s - \frac{V^2}{2g} = Z_2$$

Donc en considérant  $\frac{V^2}{2g}$  comme une perte singulière  $h_s$  où  $k = 1$

$$H_p = Z_2 - H_1 + h_f + h_s = 30m - 20m + h_f + h_s = 10m + h_f + h_s$$

La perte par frottement  $h_f$  est donnée par l'équation 2.26 avec  $L = 7(30m) = 210m$  :

$$h_f = 10,675 \cdot 210m \cdot \left( \frac{0,025}{130} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{0,15^{4,87}} = 3,027m$$

Les pertes singulières sont dues aux 6 coudes et à la prise d'eau, selon l'équation 2.31 :

$$V = Q / A = \frac{0,025m^3 / s}{\left( \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} \right)} = 1,4147m / s$$

$$h_s = (6 \cdot 0,75 + 0,04 + 1) \cdot \frac{1,4147^2}{2 \cdot 9,81} = 0,565m$$

$$\text{Donc } h_p = 10m + 3,027m + 0,565m = 13,59m$$

Selon l'équation 2.26, la puissance est :

$$P = \rho g Q H_p = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,025 \cdot 13,59 = 3332,95W$$



**Exercice 2.7**

Le débit dans chaque tuyau est  $Q/2$ . Utilisant l'équation 2.40 :

$$h_{f_1} = L \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{(Q/2)^{1,852}}{d^{4,87}} = h_{eq} = L_{eq} \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{(Q/2)^{1,852}}{d^{4,87}} = \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow D_{eq}^{4,87} = 2^{1,852} \cdot d^{4,87} \Rightarrow D_{eq} = \left[ 2^{1,852} \cdot 0,61^{4,87} \right]^{1/4,87} = 0,794 m$$

$$\boxed{D_{eq} = 0,794 m}$$

**Exercice 2.8**

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 150 l/s$$

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3}$$

D'après Hazen-Williams (2.40) :

$$L_1 \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = L_2 \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} = L_3 \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{(Q - Q_1 - Q_3)^{1,852}}{D_2^{4,87}} \\ \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{\left( Q - Q_1 - \left( \frac{D_3}{D_1} \right)^{4,87/1,852} \cdot Q_1 \right)^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{0,305^{4,87}} = \frac{(0,15 - Q_1 - 0,592 \cdot Q_1)^{1,852}}{0,205^{4,87}} \Rightarrow Q_1^{1,852} = \left( \frac{0,305}{0,205} \right)^{4,87} (0,15 - 1,592 Q_1)^{1,852}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2,84(0,15 - 1,592 Q_1) \Rightarrow Q_1 = 0,0772 m^3 / s$$

$$\boxed{Q_1 = 77,2 \text{ l/s}}$$

$$Q_2 = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^{4,87/1,852} \cdot Q_1 = \left( \frac{205}{305} \right)^{4,87/1,852} \cdot 77,2 \cdot 10^{-3} = 0,0272 m^3 / s$$

$$\boxed{Q_2 = 27,2 \text{ l/s}}$$

$$Q_3 = Q - Q_1 - Q_2 = 150 - 77,2 - 27,2 = 45,6 \text{ l/s}$$

$$\boxed{Q_3 = 45,6 \text{ l/s}}$$

### Exercice 2.9

L'équation de Hazen-Williams est utilisée pour calculer les pertes par frottement.

On obtient d'abord la conduite équivalente pour les 3 conduites en parallèle :

$$h_{f_2} = h_{f_3} = h_{f_4} = h_{eq}$$

$$\Rightarrow L_2 \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,84}} = L_3 \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,84}} = L_4 \frac{Q_4^{1,852}}{D_4^{4,84}} = L_{eq} \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,84}}$$

$$\text{Pour } L_{eq} = 1500 m$$

$$\begin{cases} Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ Q_2 = \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_3 \\ Q_4 = \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_3 \end{cases} \Rightarrow Q = \left[ 1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \right] Q_3$$

$$L_3 \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} = L_{eq_1} \frac{Q^{1,852}}{D_{eq_1}^{4,87}} \Rightarrow D_{eq_1}^{4,87} = \frac{D_3^{4,87}}{Q_3^{1,852}} \cdot Q^{1,852}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1}^{4,87} = \frac{D_3^{4,87}}{Q_3^{1,852}} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \right]^{1,852} \cdot Q_3^{1,852}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1} = D_3 \left[ 1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \right]^{1,852/4,87}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1} = 0,205 \left[ 1 + \left(\frac{0,305}{0,205}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{0,250}{0,205}\right)^{4,87/1,852} \right]^{1,852/4,87}$$

$$D_{eq_1} = 0,462 m \Rightarrow \boxed{D_{eq_1} = 462 mm}$$

Pour les trois conduites en série ainsi obtenues :

$$h_{f_1} + h_{f_{eq_1}} + h_{f_5} = h_{eq}$$

$$L_1 \cdot \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_{eq_1} \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{eq_1}^{4,87}} + L_5 \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_5^{4,87}} = L \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{D_1^{4,87}} + \frac{L_{eq_1}}{D_{eq_1}^{4,87}} + \frac{L_5}{D_5^{4,87}} = \frac{L}{D_{eq}^{4,87}}$$



$$\Rightarrow D_{eq} = \left[ \frac{L}{\frac{L_1}{D_1^{4,87}} + \frac{L_{eq_1}}{D_{eq_1}^{4,87}} + \frac{L_5}{D_5^{4,87}}} \right]^{1/4,87}$$

où  $L_1 = L_5$  et  $D_1 = D_5$

$$\Rightarrow D_{eq} = \left[ \frac{3500}{2 \cdot \frac{1000}{0,51^{4,87}} + \frac{1500}{0,462^{4,87}}} \right]^{1/4,87} = 0,486m$$

$$\boxed{D_{eq} = 486mm}$$

### Exercice 2.10

$$Q_3 = Q_2 + Q_1 \quad \text{et} \quad Q_4 = Q_3$$

Procédant par tâtonnement, supposons que  $P_I^* = 35$  m

$$h_1 = Z_1 - P_I^* = 60 - 35 = 25 \text{ m} \quad D_1 = 90 \text{ cm}$$

$$h_2 = Z_2 - P_I^* = 40 - 35 = 5 \text{ m} \quad D_2 = 60 \text{ cm}$$

$$h_3 = P_I^* - Z_3 = 35 - 20 = 15 \text{ m}$$

$$j_1 = \frac{h_1}{L_1} = \frac{25}{10000} = 0,0025 \quad D_1 = 90 \text{ cm}$$

$$j_2 = \frac{h_2}{L_2} = \frac{5}{10000} = 0,0005$$

Exprimant  $Q$  d'après Hazen-Williams (équation 2.40) :

$$Q = \left[ \frac{hD^{4,87}}{L \left( \frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852}} \right]^{1/1,852} \quad \begin{cases} Q_1 = 831 \text{ l/s} \\ Q_2 = 120 \text{ l/s} \\ Q_1 + Q_2 = 951 \text{ l/s} \end{cases}$$

L'élargissement de  $D_3$  à  $D_4$  produit une perte singulière (équation 2.32) :

$$h_s = 0,0827 K \frac{Q_3^2}{D_3^4} \quad \text{avec (équation 2.34) : } K = \left[ 1 - \left( \frac{D_3}{D_4} \right)^2 \right]^2$$

Les pertes par frottement dans les sections 3 et 4 sont obtenues par l'équation 2.40. Puisque  $L_3 = L_4$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} h_f &= L_3 \cdot \left( \frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \cdot Q_3^{1,852} \cdot \left( \frac{1}{D_3^{4,87}} + \frac{1}{D_4^{4,87}} \right) \\ h_3 = 15 \text{ m} &= 0,0827 \left[ 1 - \left( \frac{0,9}{1} \right)^2 \right]^2 \cdot \frac{Q_3^2}{0,9^4} + 5000 \cdot \left( \frac{3,59}{100} \right)^{1,852} \cdot \left[ \frac{1}{0,9^{4,87}} + \frac{1}{1^{4,87}} \right] \cdot Q_3^{1,852} \\ \Rightarrow 15 &= 4,55 \cdot 10^{-3} Q_3^2 + 28,157 Q_3^{1,852} \\ \Rightarrow Q_3 &= 712 \text{ l/s} \end{aligned}$$

Comme  $Q_3 < (Q_1 + Q_2)$ , supposons une nouvelle valeur  $P_I^* = 33 \text{ m}$  et recalculons :

$$h_1 = 60 - 33 = 27 \text{ m} \rightarrow j_1 = \frac{h_1}{L_1} = 27 / 10000 = 0,0027$$

$$h_2 = 40 - 33 = 7 \text{ m} \rightarrow j_2 = \frac{h_2}{L_2} = 7 / 10000 = 0,0007$$

$$h_3 = 33 - 20 = 13 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Hazen-Williams} \quad & \begin{cases} Q_1 = 875 \text{ l/s} \\ Q_2 = 145 \text{ l/s} \end{cases} \\ & Q_1 + Q_2 = 1020 \text{ l/s} \end{aligned}$$

$$h_3 = 4,55 \cdot 10^{-3} Q_3^2 + 28,157 Q_3^{1,852} = 13 \text{ m}$$

$$\Rightarrow Q_3 = 659 \text{ l/s}$$

$$Q_3 < Q_1 + Q_2$$

On doit augmenter la valeur de  $P_I$

Recalculons en supposant que  $P_I^* = 37 \text{ m}$

$$h_1 = 60 - 37 = 23 \text{ m} \rightarrow Q_1 = 792 \text{ l/s}$$

$$h_2 = 3 \text{ m} \rightarrow Q_2 = 100 \text{ l/s}$$

$$h_3 = 17 \text{ m} \rightarrow Q_3 = 761 \text{ l/s}$$

$$Q_1 + Q_2 = 892 \text{ l/s}$$

$$Q_3 < Q_1 + Q_2$$

Essayons  $P_I^* = 45 \text{ m}$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$h_1 = 60 - 45 = 15 \text{ m} \rightarrow j_1 = \frac{1,5}{1000} \rightarrow Q_1 = 650 \text{ l/s}$$

$$h_2 = 45 - 40 = 5 \text{ m} \rightarrow j_2 = \frac{0,5}{1000} \rightarrow Q_2 = 122 \text{ l/s}$$

$$h_3 = 45 - 20 = 25 \text{ m} \rightarrow Q_3 = 937,8 \text{ l/s}$$

$$Q_2 + Q_3 = 1060 \text{ l/s}$$

$$Q_1 < Q_2 + Q_3$$

Avec  $P_I^* = 42 \text{ m}$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 60 - 42 = 18 \text{ m} \rightarrow Q_1 = 700 \text{ l/s} \\ h_2 = 42 - 40 = 2 \text{ m} \rightarrow Q_2 = 70 \text{ l/s} \\ h_3 = 42 - 20 = 22 \text{ m} \rightarrow Q_3 = 875 \text{ l/s} \end{array} \right\} Q_1 < Q_2 + Q_3$$

Avec  $P_I^* = 40,5 \text{ m}$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 19,5 \text{ m} \rightarrow Q_1 = 750 \text{ l/s} \\ h_2 = 0,5 \text{ m} \rightarrow Q_2 = 35 \text{ l/s} \\ h_3 = 20,5 \text{ m} \rightarrow Q_3 = 842 \text{ l/s} \end{array} \right\} Q_1 < Q_2 + Q_3$$



Le calcul converge et on obtient finalement :

$$\begin{array}{l} Q_1 = 750 \text{ l/s} \\ Q_2 = 35 \text{ l/s} \\ Q_3 = 715 \text{ l/s} \end{array}$$

### Exercice 2.11

Conduite 4-3 :

Perte de charge par frottement (2.26) :

$$h_{f43} = 10,675 \cdot 500m \cdot \left( \frac{15}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{2,44^{4,87}} = 2,065m$$

Niveau au point 3 :  $H_3 = 27,0m + 2,065m = 29,065m$

La conduite 4-3 est donc sous charge et une légère inondation se produit au point 3.

Conduite 3-1 :

$$h_{f31} = 10,675 \cdot 100m \cdot \left( \frac{6}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{1,37^{4,87}} = 1,258m$$

Niveau au point 1 :  $H_1 = H_3 + 1,258m = 30,32m$

Il y a donc mise en charge au point 1, mais pas d'inondation.

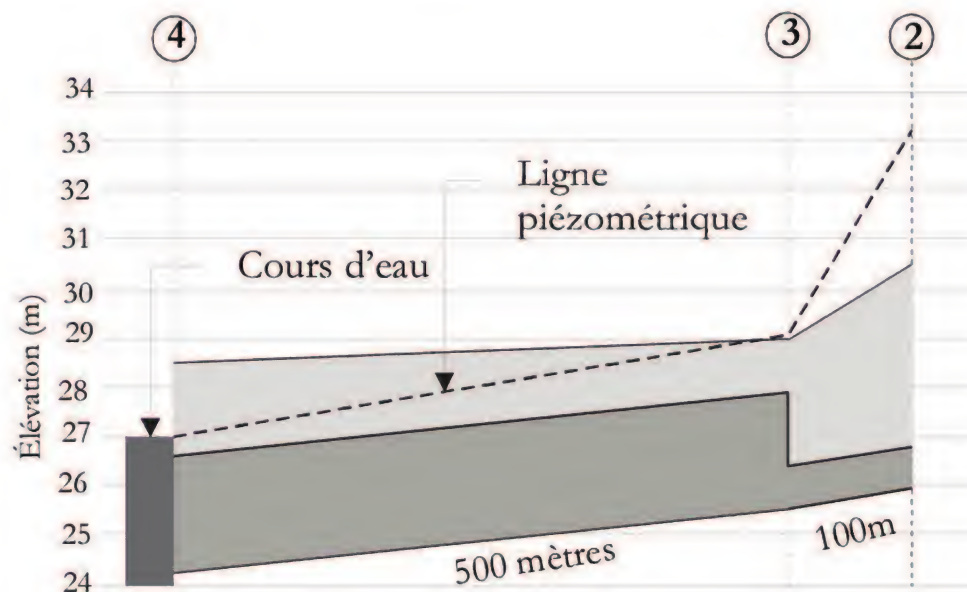
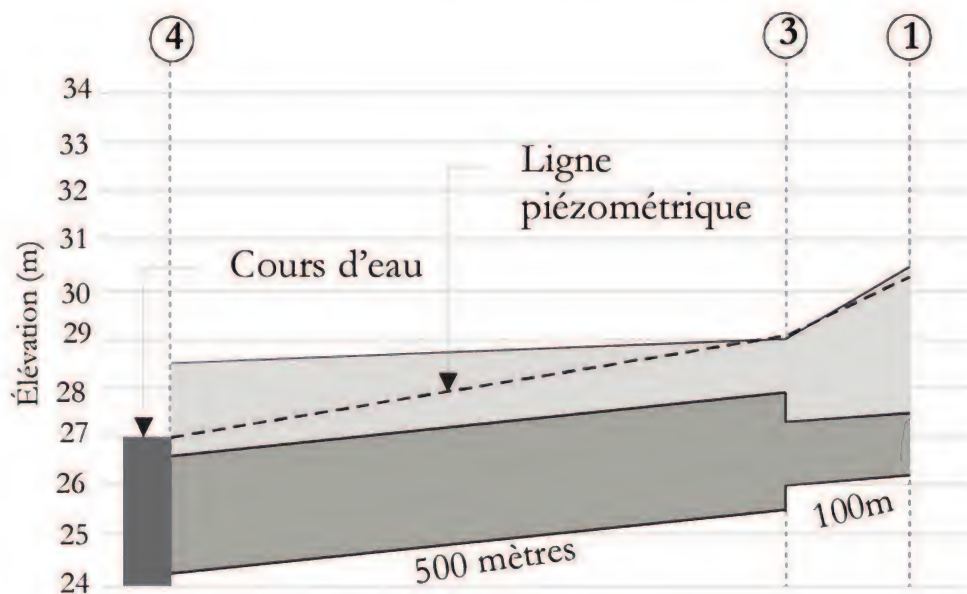
Conduite 3-2 :

$$h_{f32} = 10,675 \cdot 100m \cdot \left( \frac{4}{100} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{0,915^{4,87}} = 4,239m$$

Niveau au point 2 :  $H_2 = H_3 + 4,239m = 33,30m$

Il y a mise en charge et inondation au point 2.

Échelle horizontale = 100 fois échelle verticale



### Exercice 2.12

1) Équation de continuité :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s \quad (a)$$

2) L'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + f \frac{L_t}{d} \frac{V^2}{2g}$$

$$h + H_r = \frac{V_s^2}{2g} \left( 1 + f \frac{L_t}{d} \right)$$

et

$$V_s = \left[ \frac{2g(h + H_r)}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2}$$

3) La section de la conduite en 2 est  $A_s = \frac{\pi d^2}{4}$ . Par ailleurs  $Q_s = V_s A_s$ . Donc):

$$Q_s = A_s V_s = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left[ \frac{2g(h + H_r)}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2}$$

4)

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4} \left[ \frac{2g(h + H_r)}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2}$$

En posant  $dS = \frac{\pi D^2}{4} dh$ , on obtient :

$$\frac{dh}{dt} = -\left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left[ \frac{2g(h + H_r)}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2}$$

5) On pose  $H = h + H_r$ . Avec  $dH = dh$  :

$$\frac{dH}{dt} = -\left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left[ \frac{2gH}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2}$$

6)

$$\frac{dH}{H^{1/2}} = -\left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left[ \frac{2g}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2} dt$$

$$\int \frac{dH}{H^{1/2}} = -\left( \frac{d}{D} \right)^2 \cdot \left[ \frac{2g}{1 + f \frac{L_t}{d}} \right]^{1/2} \cdot t_{vidange}$$



$$2 \cdot (\sqrt{h_0 + H_r} - \sqrt{H_r}) = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot \left[ \frac{2g}{1 + f(L_t/d)} \right]^{1/2} \cdot t_{\text{vidange}}$$

Donc :

$$t_{\text{vidange}} = \sqrt{2} \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \left[ \frac{1 + f(L_t/d)}{g} \right]^{1/2} \cdot (\sqrt{h_0 + H_r} - \sqrt{H_r})$$

(j)

7) Avec les données numériques :

$$t_{\text{vidange}} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{100}{1}\right)^2 \cdot \left[ \frac{1 + 0,02(500/1)}{9,81} \right]^{1/2} \cdot (\sqrt{7+9} - \sqrt{9})$$

$$t_{\text{vidange}} = 14975 \text{ s } \text{ ou } 4,16 \text{ h}$$

8) Si  $h_f = 0$ ,

$$t_{\text{vidange}} = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{100}{1}\right)^2 \left[ \frac{1}{9,81} \right]^{1/2} \cdot (\sqrt{7+9} - \sqrt{9}) = 4515 \text{ s } \text{ ou } 1,25 \text{ h}$$

9) Si  $Q_e$  et  $Q_s$  sont constants :

$$dh = \frac{4}{\pi D^2} (Q_e - Q_s) dt$$

En intégrant :

$$[h]_{h_0}^{h_1} = \left[ \frac{4}{\pi D^2} (Q_e - Q_s) t \right]_0^{T_r}, \text{ soit } \Delta h = \frac{4}{\pi D^2} (Q_e - Q_s) T_r$$

D'où :

$$T_r = \frac{\Delta h \cdot \pi \cdot D^2}{4 \cdot (Q_e - Q_s)}$$

10) Avec les données numériques :

$$T_r = \frac{7 \cdot \pi \cdot 100^2}{4 \cdot (5-1)} = 13744 \text{ s } \text{ ou } 3,82 \text{ h}$$

## EXERCICES DU CHAPITRE 3

### Exercice 3.1

D'après (3.6)  $n_s = 2500 \cdot 0,050^{0,5} / 25^{0,75} = 50$

D'après la figure 3.9, il faut une pompe à aspiration double

D'après la figure 3.10, le rendement est de 78%

### Exercice 3.2

D'après (3.6)  $n_s = 1500 \cdot 0,60^{0,5} / 8,0^{0,75} = 244$

D'après la figure 3.9, il faut une pompe axiale

D'après la figure 3.10, le rendement est de 79%

### Exercice 3.3

D'après (3.6)  $n_s = 1500 \cdot 0,20^{0,5} / 50,0^{0,75} = 36$

D'après la figure 3.9, il faut une pompe radiale

D'après la figure 3.10, le rendement est de 87%

### Exercice 3.4

Pertes :  $h_f$  (frottement, équation 2.40)

$$h_f = L \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$$

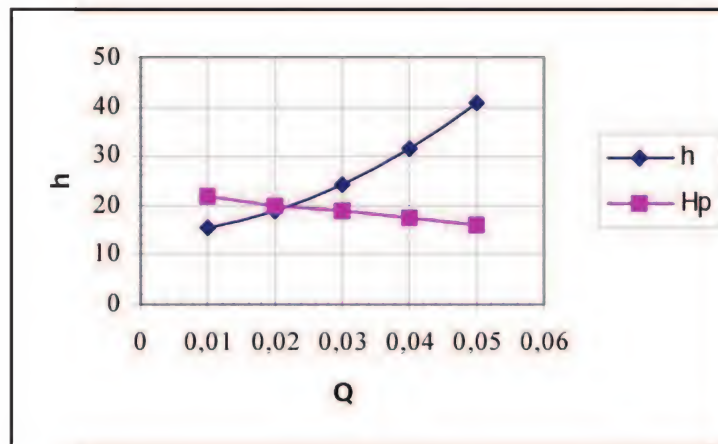
(1) \* Avant réhabilitation :  $C_{Hw} = 70$ ,  $L = 6000 \text{ m}$ ;  $D = 0,315 \text{ m}$

$$h_f = 6000 \cdot \left( \frac{3,59}{70} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{0,315^{4,87}} \cdot Q^{1,852} = 6797 \cdot Q^{1,852}$$

$$H_t = 14,0 \text{ m} + 6796 \cdot Q^{1,852}$$

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
hf	1,34	4,85	10,28	17,51	26,47
H <sub>t</sub>	15,34	18,85	24,28	31,51	40,47

En superposant la charge H<sub>t</sub> à la courbe caractéristique de la pompe H<sub>p</sub> :

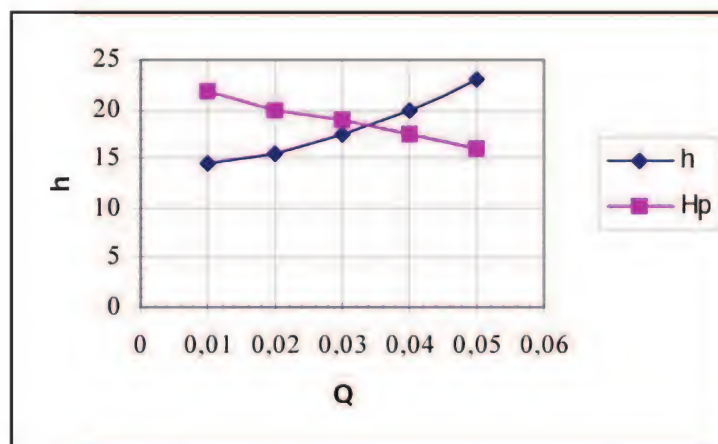


Le point de fonctionnement est :  $Q = 0,022 \text{ m}^3/\text{s}$  (22 litres/seconde), avec  $h = 20,0 \text{ m}$

- (2) \*Après réhabilitation :  $C_{Hw} = 150$  ;  $L = 6000 \text{ m}$  ;  $D = 0,295 \text{ m}$

$$h_f = 2282 \cdot Q^{1,852} \quad H_t = 14,0 \text{ m} + h_f$$

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
hf	0,45	1,63	3,45	5,88	8,89
h	14,45	15,63	17,45	19,88	22,89



Point de fonctionnement :  $Q = 0,034 \text{ m}^3/\text{s}$  (34 litres/seconde),  $H = 18 \text{ m}$



**Exercice 3.5**

5 pompes en parallèle : même perte de charge

$$Q_{\text{éq}} = 5Q$$

$$H_{\text{éq}} = 20 - 0,09 \cdot \left( \frac{Q_{\text{éq}}}{5} \right)^2$$

$$\boxed{H_{\text{éq}} = 20 - 0,0036 Q^2}$$

5 pompes en série : même débit et

$$h_{p\text{éq}} = \sum h_{pi} = 5 h_p$$

$$Q_{\text{éq}} = Q$$

$$h_{\text{éq}} = 5 \cdot (20 - 0,09 Q^2)$$

$$\boxed{h_{\text{éq}} = 100 - 0,45 Q^2}$$

**Exercice 3.6**

1) Selon l'équation 2.40

$$h_f = L \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$$

$$L = 6000m; \quad C_{HW} = 150; \quad D = 0,510m$$

$$h_f = 6000 \cdot \left( \frac{3,59}{150} \right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{0,510^{4,87}} = 158,56 \cdot Q^{1,852}$$

$$H_t = 14,0m + 158,56 Q^{1,852}$$

Courbe caractéristique de la conduite (CCC)

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
H <sub>t</sub>	14,03	14,11	14,24	14,41	14,63	14,88	15,17	15,50	15,86

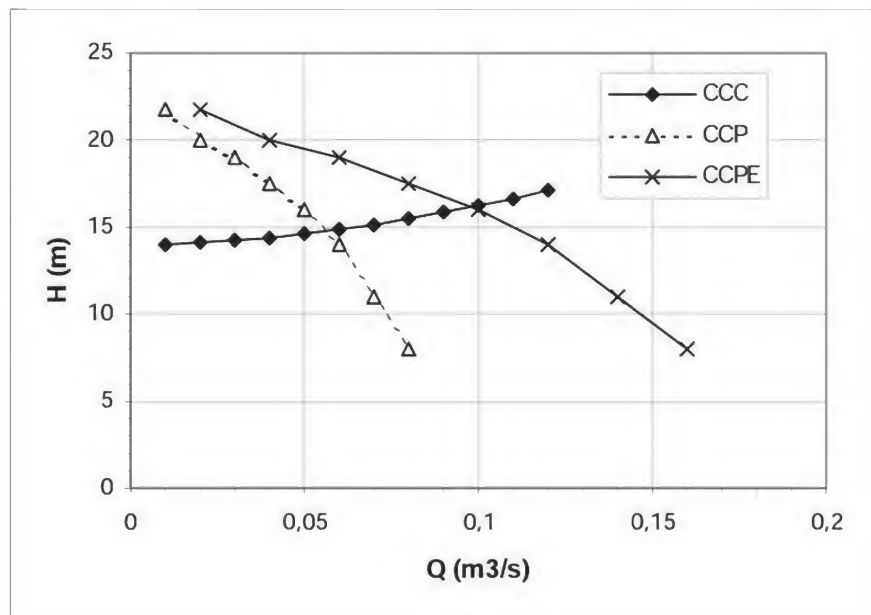
Courbe caractéristique de la pompe équivalente pour 2 pompes en parallèle : (CCPE)

Q(l/s)	20	40	60	80	100	120	140	160
H <sub>p</sub> (m)	21,75	20	19	17,5	16	14	11	8

Donc, le point de fonctionnement pour deux pompes en parallèle est :

Q = 99,5 litres/seconde et H<sub>p</sub> = 16,2m.

Pour chaque pompe :  $Q = 49,8 \text{ l/s}$  et  $H_p = 16,2 \text{ m}$ .



2) Par l'équation 3.5 :

$$P = \frac{9,81 \cdot Q \cdot H}{\eta}$$

La courbe de rendement de la pompe nous indique que pour  $Q = 50 \text{ l/s}$

$$\eta = 0,82 = 82\%$$

$$P_{\text{absorbée}} = \frac{9,81 \cdot 0,0498 \cdot 16,2}{0,82} = 9,65 \text{ kW} \quad \text{par chacune des pompes}$$

### Exercice 3.7

Négligeant les pertes singulières :

$$\text{Selon (2.40) : } h_f = 6000 \cdot \left( \frac{3,59}{150} \right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{0,51^{4,87}} = 158,57 \cdot Q^{1,852}$$

Pompes en série :  $Q_1 = Q_2 = Q$ ,  $H_{\text{tot}} = H_1 + H_2$

Courbe caractéristique de la conduite (CCC) :

Q(l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
H (m)	28	28,03	28,11	28,24	28,41	28,62	28,87	29,15	29,47	29,83	30,23

Courbe caractéristique de la pompe équivalente (CCPE) :

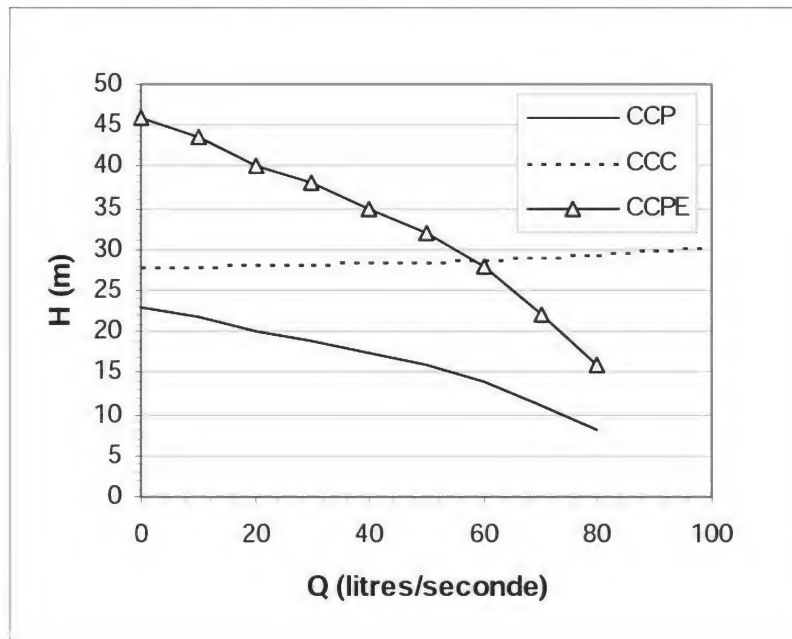
Q(l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
H (m)	46	43,5	40	38	35	32	28	22	16

Point de fonctionnement des 2 pompes :  $Q = 58 \text{ l/s}$ ,  $H = 28,5 \text{ m}$ .

Pour chaque pompe :  $Q = 58 \text{ l/s}$ ,  $H = 14,25 \text{ m}$ .

Avec un rendement de 80%, (voir courbe de rendement)

$$P = \rho g Q H_p / \eta = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,058 \cdot 14,25 / 0,8 = 10135 \text{ W}, \text{ soit } 10,14 \text{ kW}$$



### Exercice 3.8

1) Pompe non opérante :

$$H = h_{f1} + h_{f2} = L_1 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$10 \text{ m} = \left[ 30 \left[ \frac{3,59}{140} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}} + 350 \cdot \left[ \frac{3,59}{130} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}} \right] Q^{1,852} = 358,66 \cdot Q^{1,852}$$

$$Q = \left( \frac{10}{358,66} \right)^{1/1,852} = 0,145 \text{ m}^3 / \text{s}$$



- 2) Pompe en fonctionnement, écoulement de A vers B :

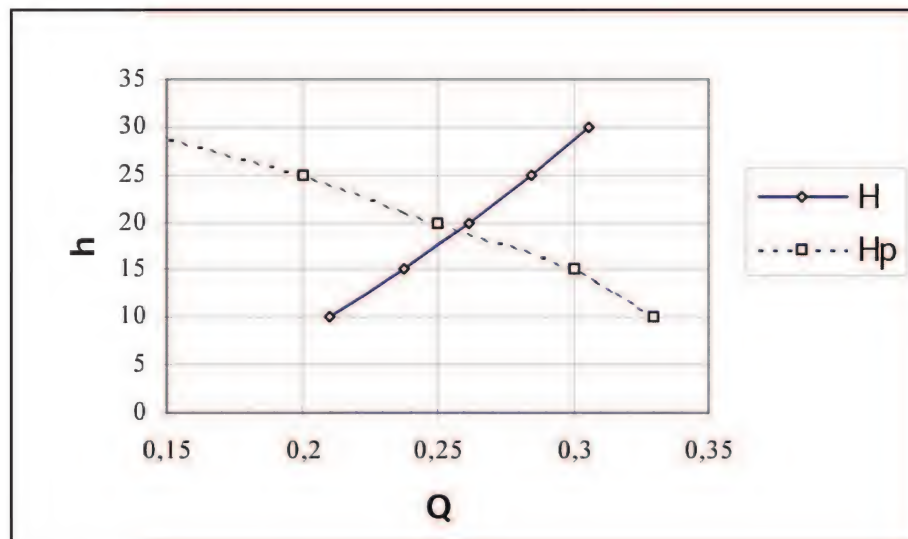
$$H_P = -H + h_{f1} + h_{f2}$$

$$H_P = -10 + L_2 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}} + L_1 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}}$$

$$H_P = -10 + \left[ 350 \left[ \frac{3,59}{130} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}} + 30 \left[ \frac{3,59}{140} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}} \right] Q^{1,852}$$

$$H_P = -10 + 358,66 Q^{1,852}$$

$$Q = \left[ \frac{H_P + 10}{358,66} \right]^{1/1,852}$$



pour  $H = 19 \text{ m}$   $Q = 0,26 \text{ m}^3 / \text{s}$

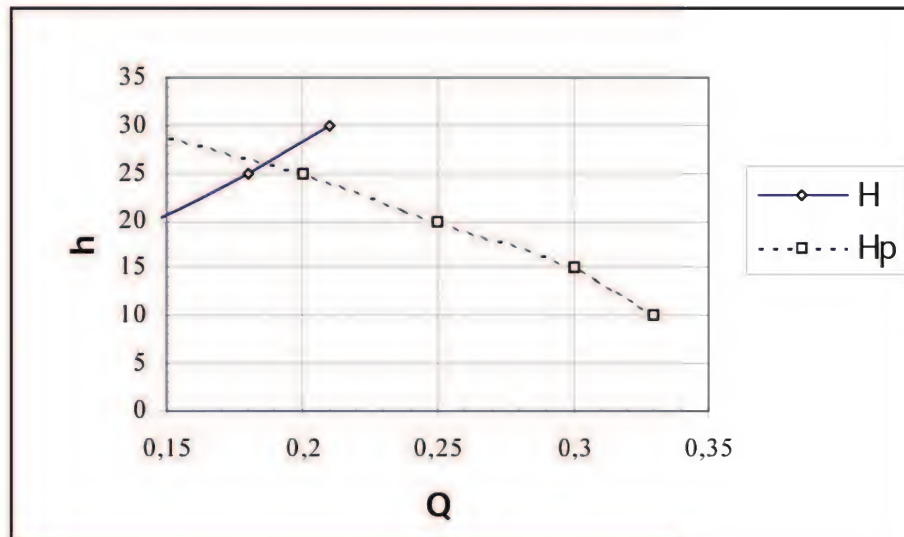
- 3) Pompe en fonctionnement, écoulement de B vers A :

$$H_P = H + h_{f1} + h_{f2}$$

$$H_P = 10 + L_1 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left[ \frac{3,59}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$H = 10 + \left[ 30 \left[ \frac{3,59}{140} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}} + 350 \left[ \frac{3,59}{140} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}} \right] Q^{1,852}$$

$$H_p = 10 + 358,66 Q^{1,852} \Rightarrow Q = \left[ \frac{H - 10}{358,66} \right]^{1/1,852}$$



Pour  $H = 26m \Rightarrow Q = 0,19 m^3 / s$

### Exercice 3.9

$$1) \quad J = L \left[ \frac{3,59}{C_{HW}} \right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} = 30.10^3 \left[ \frac{3,59}{140} \right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,9^{4,87}} \cdot Q^{1,852}$$

$$\Rightarrow J = 56,5 Q^{1,852} ; \quad Hg = 138 - 107 = 31m$$

Q(l/s)	25	50	75	125	225	300
J(m)	0,06	0,22	0,47	1,2	3,6	6,01

1 pompe : 3 cellules en série  $\Rightarrow$  même débit et  $h_{\text{eq}} = \sum h_i = h_p$

3 pompes //  $\Rightarrow h_{\text{eq}} = h_i$  et  $Q_{\text{eq}} = 3Q_i$

$$\Rightarrow Q_{\text{systeme fonctionnement}} = 825 l/s$$

Pour une pompe :  $Q = (825 l/s) / 3 = 275 l/s$

$$2) \quad NPSH_{\text{disp}} = 10 - (h_a + J_a) = 10 + h_a = 10 + 2 = 12m < NPH_{\text{requis}} = 12,5m$$

Il y a risque de cavitation.

## EXERCICES DU CHAPITRE 5

## Exercice 5.1

$$n = 0,013; \quad B = 5m; \quad h_n = 1m \quad S_o = 5 \cdot 10^{-4}$$

1) Selon l'équation (5.13)

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S^{1/2}$$

D'après le tableau 5.1, le rayon hydraulique est :

$$R_H = \frac{B \cdot h_n}{B + 2h_n} = \frac{5 \cdot 1}{5 + 2 \cdot 1} = \frac{5}{7}$$

$$Q = \frac{5 \cdot 1}{0,013} \left( \frac{5}{7} \right)^{2/3} \cdot (5 \cdot 10^{-4})^{1/2} = \boxed{6,87 m^3 / s}$$

$$2) \quad Q_2 = 13,74 = \frac{B \cdot y_n}{n} \cdot \left( \frac{B \cdot y_n}{B + 2y_n} \right)^{2/3} \cdot S^{1/2}$$

$$13,74 = \frac{5 y_n}{0,013} \cdot \left( \frac{5 y_n}{5 + 2 y_n} \right)^{2/3} \cdot 0,0005^{1/2}$$

$$5 y_n \cdot \left( \frac{5 y_n}{5 + 2 y_n} \right)^{2/3} - 7,99 = 0$$

On trouve par itérations successives :  $\boxed{y_n = 1,62m}$

## Exercice 5.2

1) D'après l'équation (5.13) :

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S^{1/2}$$

D'après le tableau (5.1) :

$$A = (b + y_n) y_n \quad \text{et} \quad R_H = \frac{(b + y_n) y_n}{b + 2\sqrt{2} y_n}$$



$$10 = \frac{(6 + y_n) \cdot y_n}{0,022} \cdot \left( \frac{(6 + y_n) \cdot y_n}{6 + 2,8284 y_n} \right)^{2/3} \cdot 0,001^{1/2}$$

$$6,9570 = (6 + y_n) \cdot y_n \left( \frac{(6 + y_n) y_n}{6 + 2,8284 y_n} \right)^{2/3}$$

Par essais successifs :  $y_n = 1,092 m$

- 2) En utilisant de nouveau l'équation (5.13) avec  $y = 2,184 m$  :

$$A = (6 + 2,184) \cdot 2,184 = 17,8739 m$$

$$R_H = \frac{(6 + 2,184) \cdot 2,184}{6 + 2,8284 \cdot 2,184} = 1,4678 m$$

$$Q = \frac{17,8739}{0,022} \cdot (1,4678)^{2/3} \cdot 0,001^{1/2} = \boxed{33,2 m^3 / s}$$

### Exercice 5.3

D'après le tableau 5.1 :

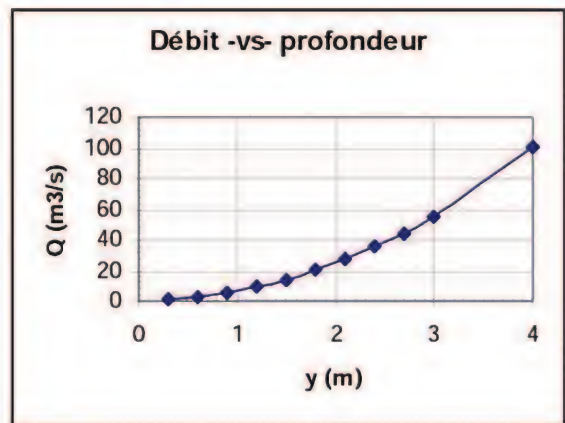
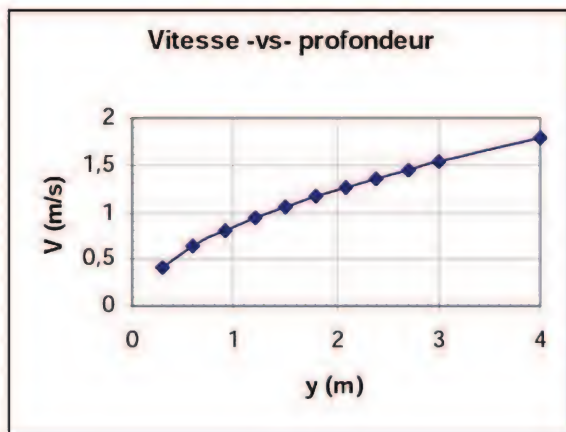
$$A = (6 + 2y)y \quad \text{et} \quad R_H = \frac{(6 + 2y)y}{6 + 2y\sqrt{5}}$$

Selon l'équation (5.12) :

$$V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} S^{1/2} \quad \text{et} \quad Q = AV$$

On peut donc calculer V et Q pour différentes valeurs de y

y(m)	A(m <sup>2</sup> )	V(m/s)	Q(m <sup>3</sup> /s)
0,3	1,98	0,467	0,924
0,9	7,02	0,882	6,189
1,5	13,5	1,164	15,71
2,1	21,42	1,394	29,85
3	36	1,687	60,74
4	56	1,973	110,486



### Exercice 5.4

$$A = b \cdot y_n + \frac{y_n \cdot 2 \cdot y_n}{2} = b \cdot y_n + y_n^2 \quad \text{d'où : } b = \frac{A - y_n^2}{y_n}$$

$$A = \frac{Q}{V} = \frac{10 \text{ m}^3 / \text{s}}{1 \text{ m} / \text{s}} = 10 \text{ m}^2$$

Pour  $y_n = 1,0 \text{ m}$       $b = \frac{10 - 1^2}{1} = 9$       $b = 9 \text{ m}$

### Exercice 5.5

Le cas de la conduite pleine permet de calculer  $S$  par l'équation (5.13) :

$$Q_P = \frac{1}{n} A R_H^{2/3} S^{1/2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\pi D^2}{4}; \quad R_H = \frac{A}{P} = \frac{D}{4}$$

$$S = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3}} = \frac{0,014^2 \cdot (0,100)^2}{\frac{3,14^2 \cdot 0,305^4}{16} \cdot \left(\frac{0,305}{4}\right)^{4/3}} = 0,0114$$

$S = 0,0114$

Conduite 75 % pleine :

$$y_n = 0,75 \cdot D = 229 \text{ mm}$$

$$V_p = \frac{Q_p}{A} = \frac{0,100}{\pi \cdot \frac{0,305^2}{4}} = 1,3687 \text{ m/s}$$

Selon le tableau 5.3,  $\frac{V}{V_p} = 1,135$

Donc  $V = 1,1325 \cdot 1,3687 \text{ m/s} = 1,55 \text{ m/s}$

$$\boxed{V = 1,55 \text{ m/s}}$$

\* Conduite 30 % pleine :

$$y_n = 0,3 \cdot D = 91,5 \text{ mm}$$

$$\frac{V}{V_p} = 0,776 \cdot V = 0,776 \cdot 1,3687 \text{ m/s} = 1,0621 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V = 1,06 \text{ m/s}}$$

### Exercice 5.6

$$h = 0,75 D \Rightarrow \text{Tableau 5.3} \Rightarrow \frac{Q}{Q_p} = 0,91 \Rightarrow \boxed{Q_p = \frac{0,14}{0,91} = 0,154 \text{ m}^3 / \text{s}}$$

$$Q_{\min} = 0,03 \text{ m}^3 / \text{s} \Rightarrow \frac{Q_{\min}}{Q_p} = 0,195 \Rightarrow \text{tableau 5.3} \Rightarrow \frac{V_{\min}}{V_p} = 0,776$$

ou  $V_{\min} = 0,6 \text{ m/s} \Rightarrow V_p = 0,77 \text{ m/s}$

$$A = \frac{Q_p}{V_p} = \frac{0,154}{0,77} = 0,198 \text{ m}^2 = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \boxed{D = 0,5 \text{ m}}$$

Calcul de S en utilisant l'équation (5.12) :

$$S = \left( \frac{n \cdot V_p}{R_H^{2/3}} \right)^2 = \left( \frac{0,015 \cdot 0,77}{\left( \frac{0,5}{4} \right)^{2/3}} \right)^2 = 2,1 \cdot 10^{-3}$$



$$S = 2,1 \cdot 10^{-3}$$

Selon le tableau 5.3, le débit maximum à surface libre est

$$\frac{Q_{\max}}{Q_p} = 1,0745 \quad \text{donc} \quad Q_{\max} = 0,166 \text{ m}^3 / \text{s}$$

### Exercice 5.7

Indices utilisés : c pour conduite à section circulaire et r pour conduite à section rectangulaire.

$$Q_r = 2 \cdot Q_c$$

utilisant (5.13), simplifiant par  $S_f$  :

$$\frac{2 A_c}{n_c} \times R_{Hc}^{2/3} = \frac{A_r}{n_r} \cdot R_{Hr}^{2/3}$$

$$A_c = \frac{\pi \cdot D_c^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,54^2}{4} = 1,8627 \quad \text{et} \quad R_{Hc} = \frac{D}{4} = 0,385$$

$$A_r = b \cdot y_r = 1,54 \cdot y_r$$

$$\text{Selon le tableau 5.1 : } R_{Hr} = \frac{b \cdot y_r}{b + 2 y_r} = \frac{1,54 \cdot y_r}{1,54 + 2 y_r}$$

$$\text{Donc } \frac{2 \cdot 1,8627}{0,025} \cdot 0,385^{2/3} = \frac{1,54 \cdot y_r}{0,012} \cdot \left( \frac{1,54 \cdot y_r}{1,54 + 2 y_r} \right)^{2/3}$$

$$\text{Soit : } 1,54 y_r^2 - 0,9634 y_r - 0,7418 = 0$$

$$y_r = 1,074 \text{ m}$$

### Exercice 5.8

$$Q = 5 \text{ m}^3 / \text{s} \quad , \quad n = 0,013$$

$$B = 4 \text{ m}$$

- a) Le débit unitaire est  $q = \frac{Q}{b} = \frac{5 \text{ m}^3 / \text{s}}{4 \text{ m}} = 1,25 \text{ m}^2 / \text{s}$
- Selon l'équation (5.25) :  $y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left( \frac{1,25^2}{9,81} \right)^{1/3} = 0,5421 \text{ m}$
- $y_c = 0,54 \text{ m}$
- b) D'après (5.28)  $V_c = \sqrt{g \cdot y_c} = 2,3 \text{ m/s}$
- $V_c = 2,3 \text{ m/s}$
- c) D'après (5.31)  $S_c = \left( \frac{nQ}{A_c R_{H_c}^{2/3}} \right)^2 = 0,0028$
- $S_c = 0,0028$

### Exercice 5.9

- 1) En (3) :  $Q = V \cdot A = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50 \text{ m}^3 / \text{s}$

La charge totale en 3 :

$$E_3 = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 1 + \frac{5^2}{2 \cdot 9,81} = 2,27 \text{ m}$$

Par la conservation d'énergie entre 2 et 3

$$y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta Z = y_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

L'écoulement est critique en 2 si  $\frac{dE_2}{dy} = 0$

$$E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{B^2 y^2 \cdot 2 \cdot g} \quad \text{et} \quad \frac{dE_2}{dy} = -\frac{Q^2}{B^2 g y^3} = 0$$

$$y_{2c} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}} = \sqrt[3]{\frac{50^2}{10^2 \cdot 9,81}} = 1,366 \text{ m}$$

$$y_c = 1,366m$$

$$E_3 = E_2 + \Delta Z = 2,27 = 1,366 + \frac{50^2}{10^2 \cdot 1,366^2 \cdot 2 \cdot 9,81} + \Delta Z$$

$$\Delta Z = 2,27m - 2,049m = 0,221m \quad \boxed{\Delta Z = 0,221m}$$

2) Selon (5.22), le nombre de Froude en 1 est :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{Q^2 \cdot B}{g B^3 \cdot y_1^3} = \frac{Q^2}{g \cdot B^2 \cdot y_1^3}$$

Selon la conservation d'énergie entre 1 et 2 :  $E_1 = E_2 = E_3 = 2,27m$

$$Q = V \cdot A = 5,0m/s \cdot 1,0m \cdot 10,0m = 50m^3/s$$

$$y_1 + \frac{Q^2}{B^2 \cdot 2 \cdot g \cdot y_1^2} = y_1 + \frac{50^2}{10^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot y_1^2}$$

$$y_1 + \frac{1,274}{y_1^2} = 2,27$$

$$\boxed{y_1 = 1m}$$

$$Fr^2 = \frac{50^2}{9,81 \cdot 10^2 \cdot 1,0^3} = 2,55$$

$$\boxed{Fr = 1,60 > 1}$$

Régime torrentiel dans la section 1

### Exercice 5.10

1) En (1) :  $A_1 = B_1 \cdot y_1$  et du tableau 5.1 :  $R_{H1} = \frac{B_1 \cdot y_1}{B_1 + 2 \cdot y_1}$

D'après (5.22) :  $Fr^2 = \frac{Q^2 B_1}{g \cdot A^3} = \frac{Q^2}{g \cdot B_1^2 \cdot y_1^3}$

Selon (5.13)  $Q = \frac{1}{n} A R_H^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{2} B_1 \cdot y_1 \cdot \left( \frac{B_1 y_1}{B_1 + 2 \cdot y_1} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$



$$10 = \frac{1}{0,02} \cdot 10 \cdot y_1 \left( \frac{10 y_1}{10 + 2 y_1} \right)^{2/3} \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-4}}$$

$$1 = y_1 \cdot \left( \frac{10 y_1}{10 + 2 y_1} \right) \quad \text{soit} \quad 10 y_1^2 - 2 y_1 - 10 = 0 \quad \boxed{y_1 = 1,1m}$$

$$Fr_1^2 = \frac{10^2}{9,81 \cdot 10^2 \cdot 1,1^3} = 0,076 \quad \text{et} \quad \boxed{Fr_1 = 0,275 < 1 \quad \text{écoulement fluvial en 1}}$$

En 2, il faut que l'écoulement soit critique, donc  $Fr_2 = 1$

Comme en 1,

$$(Fr_2)^2 = \frac{Q^2}{g \cdot B_2^2 \cdot y_2^3} = 1 \quad \text{et} \quad Q^2 = g \cdot B_2^2 \cdot y_2^3$$

Selon la conservation de l'énergie :

$$E_1 = y_1 + \frac{Q^2}{2g \cdot B_1^2 \cdot y_1^2} = E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{2g \cdot B_2^2 \cdot y_2^2} = E_c$$

$$\text{Donc } E_c = 1,1m + \frac{10^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 10^2 \cdot 1,1^2} = 1,142m$$

$$\text{Selon (5.27) : } E_c = \frac{3}{2} \cdot y_c \quad \text{donc} \quad y_c = \frac{2 \cdot 1,142}{3} = 0,76m \quad \boxed{y_c = 0,76m}$$

$$\text{D'après (5.25) : } y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{Q^2 / B_2^2}{g}} \quad \text{donc} \quad B_2 = \sqrt{\frac{Q^2}{g y_c^3}}$$

$$\boxed{B_2 = 4,82m}$$

2) Pour  $B_2^1 = \frac{B_2}{2} = 2,41m$

$$\text{Selon (5.27) : } E_c^1 = \frac{3}{2} y_{2c}^1 = 1,81m$$

Il faut que

$$E_1^l = E_c^l = y_1^l + \frac{Q^2}{2g(B_1)^2 \cdot (y_1^l)^2} = y_1^l + \frac{10^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 10^2 \cdot (y_1^l)^2} = 1,81m$$

$$(y_1^l)^3 - 1,81 \cdot (y_1^l)^2 + 0,051 = 0 \quad \boxed{y_1^l = 1,79m}$$

### Exercice 5.11

$$B = 15m \quad , \quad S_0 = 1 \cdot 10^{-5}, \quad Q = 50m^3/s$$

$$y_1 = 3m \quad , \quad y_2 = 3,25m$$

Selon l'équation (5,45)

$$\Delta x = \left[ \frac{1 - \frac{Q^2 B}{g \cdot A^3}}{S_0 - \frac{n^2 Q^2}{A^2 \cdot R^{4/3}}} \right] \Delta y$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 3m \\ y_2 = 3,25 \end{array} \right\} y = \frac{y_1 + y_2}{2} = 3,125m = \text{valeur moyenne de } y$$

$$A = B \cdot y = 15 \cdot 3,125 = 46,875m^2 = \text{valeur moyenne de } A$$

$$R_H = \frac{By}{B + 2y} = \frac{46,875}{15 + 2 \cdot 3,125} = 2,205m = \text{valeur moyenne de } R_H$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 0,25m \quad y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$\Delta x = \left[ \frac{1 - \frac{50^2 \cdot 15}{9,81 \cdot 46,875^3}}{1 \cdot 10^{-5} - \frac{0,025^2 \cdot 50^2}{46,875^2 \cdot 2,205^{4/3}}} \right] \cdot 0,25 = -1012,36m$$

$$\boxed{\Delta x = 1012,36m}$$

- b) Pour trouver la forme du profil (tableau 5.26), il faut connaître  $y$ ,  $y_n$  et  $y_c$ .

Utilisant (5.13) :

$$\frac{nQ}{S^{0,5}} = A \cdot R_H^{2/3} = B \cdot y_n \cdot \left( \frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3}$$

$$\frac{0,025 \cdot 50}{\sqrt{1,0 \cdot 10^{-5} \cdot 15}} = y_n \cdot \left( \frac{15 \cdot y_n}{15 + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3} \quad \boxed{y_n = 10m}$$

Pour  $y_c$ ,  $Fr = 1,0$

Selon (5.22) :

$$F_r^2 = 1 = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot (B \cdot y_c)^3}$$

$$y_c = \left( \frac{Q^2}{g \cdot B^3} \right)^{1/3} = \left( \frac{50^2}{9,81 \cdot 15^2} \right)^{1/3} = 1,04m \quad \boxed{y_c = 1,04m}$$

$y_n > y > y_c$  : il s'agit du profil  $M_2$  sur le tableau 5.26

$y_2$  est donc vers l'amont

## Exercice 5.12

Géométrie du fond du canal :

$$Z_2 = 25m$$

$$Z_j = Z_2 + S_2 \times L_2 = 25 + 0,001 \times 1500 = 26,5m$$

$$Z_1 = X_j + S_1 \times L_1 = 26,5 + 0,005 \times 300 = 28,0m$$

Valeurs connues :

$$y_1 = 30,0m - 28,0m = 2,0m$$

$$y_2 = 27,5m - 25,0m = 2,5m$$

L'écoulement est critique à l'entrée du canal :

$$y_c = y_1 = 2,0m$$



Selon (5.25) :  $y_c = \left[ \frac{q^2}{g} \right]^{1/3}$  d'où  $q = (g \cdot y_c^3)^{1/2} = (9,81 \cdot 2^3)^{1/2}$

$$Q = B \cdot q = 9,0 \cdot (9,81 \cdot 2^3)^{1/2} = 79,73 \text{ m}^3 / \text{s}$$

La figure 5.14 donne  $y/b$  en fonction de  $AR_H^{2/3} / b^{8/3}$ .

De (5.13) :  $A = nQ / (R_H^{2/3} S^{1/2})$ . Donc  $AR_H^{2/3} / b^{8/3} = nQ / (b^{8/3} S^{1/2})$

Dans la section 1,  $\frac{nQ}{b^{8/3} \cdot S_1^{1/2}} = \frac{0,015 \cdot 79,73}{9,0^{8/3} \cdot 0,005^{1/2}} = 0,048$

De la figure 5.14,  $y/b = 0,17$ . Donc  $y_{N_1} = 1,53 \text{ m}$

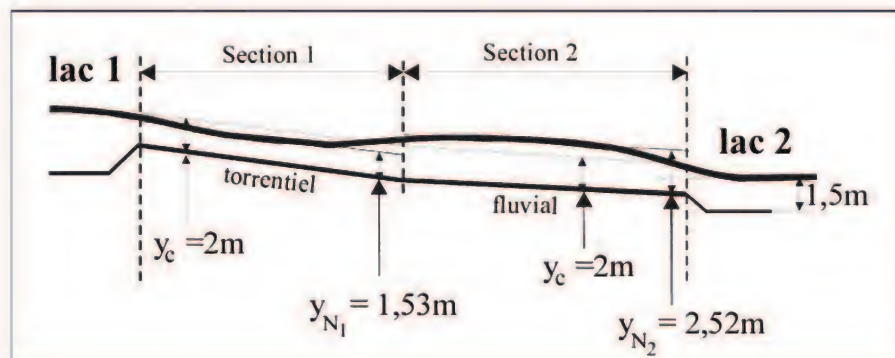
Donc, l'écoulement est torrentiel dans la section 1.

Dans la section 2,  $\frac{nQ}{b^{8/3} \cdot S_2^{1/2}} = \frac{0,015 \cdot 79,73}{9,0^{8/3} \cdot 0,001^{1/2}} = 0,108$

De la figure 5.14,  $y/b = 0,28$ . Donc  $y_{N_2} = 2,52 \text{ m}$

Donc l'écoulement est fluvial dans la section 2.

L'allure de la surface libre est montrée schématiquement sur la figure ci-jointe.



**Exercice 5.13**

La profondeur normale peut être calculée à partir de l'équation (5.13) en substituant

$$A = B \cdot y_n \quad \text{et} \quad R_H = \frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n}$$

$$\text{Ainsi :} \quad Q = \frac{B \cdot y_n}{n} \cdot \left( \frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3} \cdot S_f^{1/2}$$

- (a) Supposant  $S_f = S_0 = 0,009$  et groupant les termes connus à gauche, (a) donne :

$$\frac{15 \cdot 0,025}{10 \cdot \sqrt{0,009}} = y_n \cdot \left( \frac{10 \cdot y_n}{10 + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3}$$

$$= 0,39528$$

- (b) On résout (b) par essais successifs et on obtient  $y_n = 0,60m$

Selon l'équation (5.25), la profondeur critique est:

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left( \frac{(15/10)^2}{9,81} \right)^{1/3} = 0,612m$$

Selon les données,  $y_{\text{ref}} = y_0 = y_n + 4,0m = 4,60m$  (voir paragraphe 5.7.3.3).

Donc  $y_n = y_c$  : pente critique;

$y_{\text{ref}} > y_c$  : courbe de remous de type C1 (figure 5.27)

Suivant la procédure pour  $y_{\text{ref}}$  connu à l'aval (au contact avec le lac), avec  $\Delta y = 0,50m$

- 1-  $y_1 = y_{\text{ref}} = 4,60m$ , pour  $x = 0$
- 2-  $y_2 = y_1 - 0,50m = 4,10m$
- 3-  $y_m = (y_1 + y_2)/2 = 4,35m$
- 4-  $A_m = B y_m = 10m \cdot 4,35m = 43,50m^2$
- 5-  $R_{Im} = A_m / (B + 2y_m) = 2,326m$
- 6- On calcule  $\Delta x$  par (5.45) :

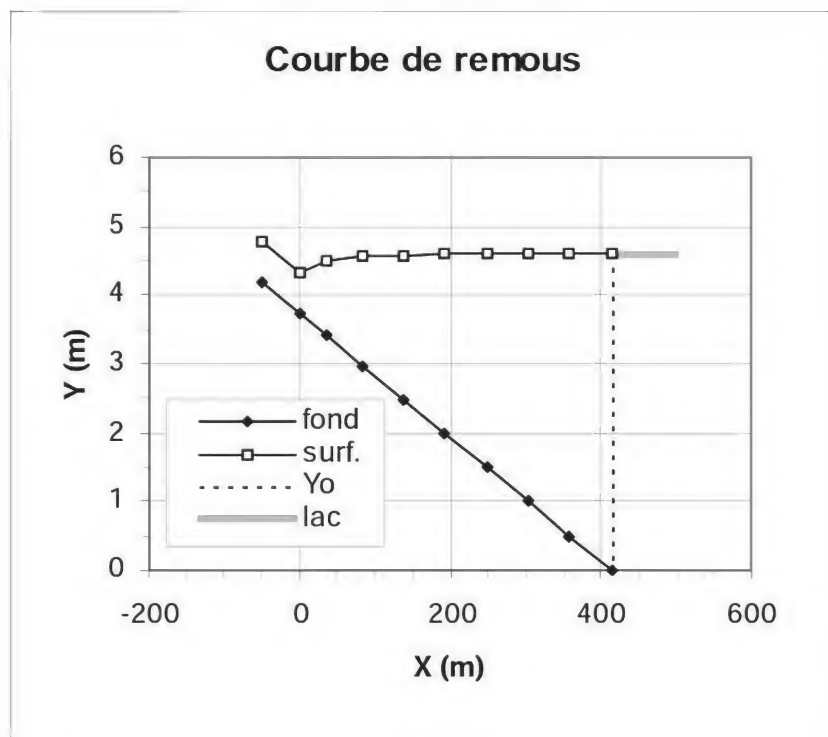
$$\Delta x_1 = 0,5 \cdot \left[ \frac{1 - \frac{15^2 \cdot 10}{9,81 \cdot 43,5^3}}{0,009 - \frac{0,025^2 \cdot 15^2}{43,5^2 \cdot 2,326^{4/3}}} \right] = 55,401m$$

- 7-  $x = x + \Delta x = 0 + 55,401m = 55,401m$
- 8-  $y_2 = y_1 = 4,10m$
- 9- on recommence à l'étape 2 jusqu'à ce qu'on atteigne  $y = y_n$

Le tableau suivant montre les étapes de calcul :

$y_1$	$y_2$	$y_m$	$A_m$	$RH_m$	$\Delta_x$	$x$
4,6	4,1	4,35	43,5	18,7	55,401	55,401
4,1	3,6	3,85	38,5	17,7	55,332	110,733
3,6	3,1	3,35	33,5	16,7	55,217	165,950
3,1	2,6	2,85	28,5	15,7	55,005	220,955
2,6	2,1	2,35	23,5	14,7	54,574	275,529
2,1	1,6	1,85	18,5	13,7	53,543	329,072
1,6	1,1	1,35	13,5	12,7	50,377	379,449
1,1	0,6	0,85	8,5	11,7	34,808	414,258

La figure suivante montre la courbe de remous (Note : les valeurs des  $x$  ont été ajustées de manière à représenter le lac à droite)





**Exercice 5.14**Conduite 4-3

Débit pour conduite pleine, selon l'équation (5.17) :

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 2,44^{8/3} \cdot 0,0025^{1/2} = 12,94 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{15,0}{12,94} = 1,16, \text{ donc il y a mise en charge}$$

Selon l'équation (5.15b) :

$$S_f = \left( \frac{n \cdot Q}{0,3117 \cdot D^{8/3}} \right)^2 = \left( \frac{0,013 \cdot 15}{0,3116 \cdot 2,44^{8/3}} \right)^2 = 0,003361$$

$$\Delta H = L \cdot S_f = 500,0 \text{ m} \cdot 0,003361 = 1,68 \text{ m}$$

Niveau d'eau en 3 :  $27,0 \text{ m} + 1,68 \text{ m} = 28,68 \text{ m}$  (pas d'inondation en 3).

Conduite 3-1

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 1,37^{8/3} \cdot 0,0015^{1/2} = 2,15 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{6,0}{2,15} = 2,8, \text{ donc il y a mise en charge}$$

$$S_f = \left( \frac{0,013 \cdot 6,0}{0,3117 \cdot 1,37^{8/3}} \right)^2 = 0,0168$$

$$\Delta H = 100,0 \text{ m} \cdot 0,0168 = 1,68 \text{ m}$$

Niveau de l'eau en 1 :  $18,68 \text{ m} + 1,68 \text{ m} = 20,36 \text{ m}$  (pas d'inondation en 1)

Conduite 3-2

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 0,915^{8/3} \cdot 0,004^{1/2} = 1,197 m^3 / s$$

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{4}{1,197} = 3,35, \text{ donc il y a mise en charge}$$

$$S_f = \left( \frac{0,013 \cdot 4,0}{0,3117 \cdot 0,915^{8/3}} \right)^2 = 0,0447$$

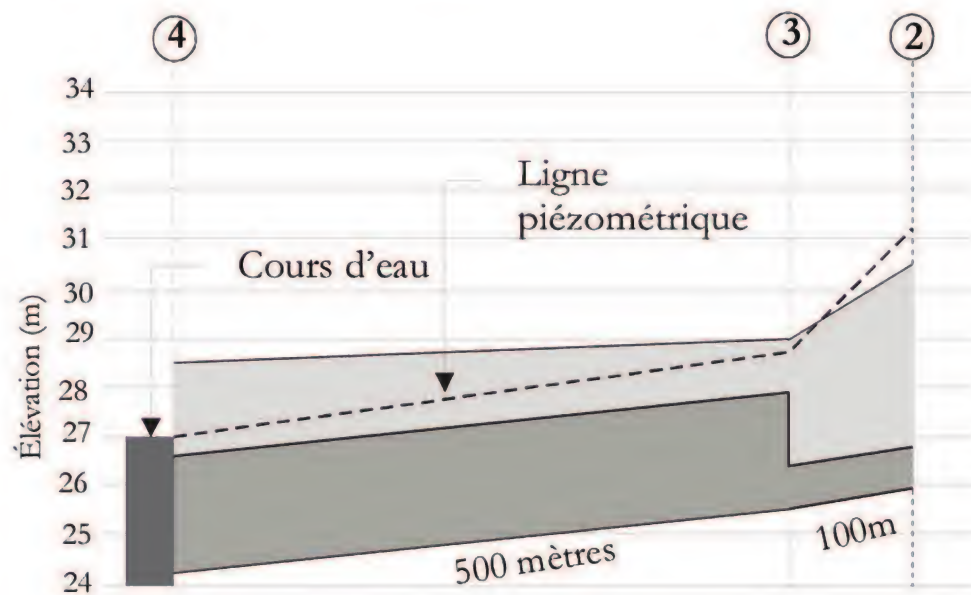
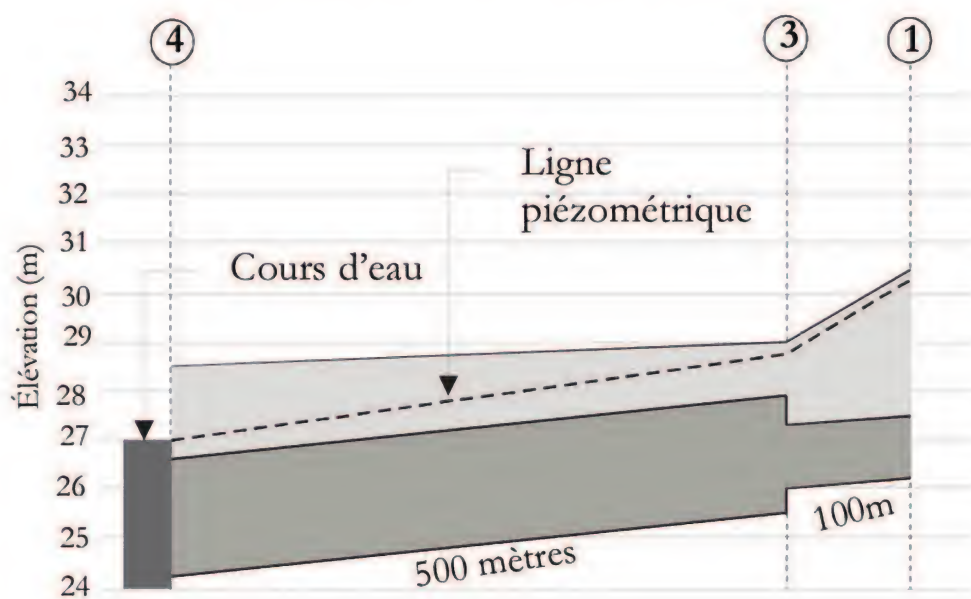
$$\Delta H = 100,0 m \cdot 0,0447 = 4,47 m$$

Niveau de l'eau en 2 : 26,68m + 4,47m = 31,15m

Le niveau du sol en 2 étant 30,5m, il y a une inondation de 0,65m.

Les profils piézométriques sont montrés sur la figure ci-jointe :

Échelle horizontale = 100 fois échelle verticale





Choix des diamètres pour éliminer les mises en charge et l'inondation. On suppose  $S_f = S_0$ .

#### Conduite 4-3

Pour une conduite pleine, on a de l'équation (5.17) :

$$D_p = \left( \frac{n \cdot Q_p}{0,3117 \cdot S_f^{1/2}} \right)^{3/8} \quad (c)$$

$$D_p = \left( \frac{15,0 \cdot 0,013}{0,3117 \cdot 0,0025^{1/2}} \right)^{3/8} = 2,58m$$

Le diamètre disponible est  $D = 2,745m$  pour lequel  $Q_p$  est :

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 2,745^{8/3} \cdot 0,0025^{1/2} = 17,71m^3/s$$

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{15,0}{17,71} = 0,85$$

À l'aide du tableau 5.3, on obtient  $y/D = 0,707$  et donc  $y = 0,707 \cdot 2,745 = 1,94m$

La profondeur de l'eau au point 3 dans la nouvelle conduite de diamètre 2,745m est donc de 1,94m. L'écoulement est donc à surface libre au point 3 et il n'y a plus de mise en charge. La conduite sera pleine à partir d'un point entre 3 et 4.

#### Conduite 3-1

Procédant comme précédemment,  $D_p = 2,013m$ .

Diamètre disponible = 2,135m.

Pour ce diamètre  $Q_p = 7,018m^3/s$  ;  $Q/Q_p = 0,855$  ;  $y/D = 0,71$

Profondeur de l'eau en 1 :  $y = 1,52m$ .

L'écoulement est à surface libre et il n'y a plus de mise en charge.

#### Conduite 3-2

Comme plus haut,  $D_p = 1,439m$

Diamètre disponible = 1,525m.

Pour ce diamètre  $Q_p = 4,672m^3/s$  ;  $Q/Q_p = 0,86$  ;  $y/D = 0,72$

Profondeur de l'eau en 1 :  $y = 1,1m$ .

L'écoulement est à surface libre et il n'y a plus de mise en charge.

**Exercice 5.15**

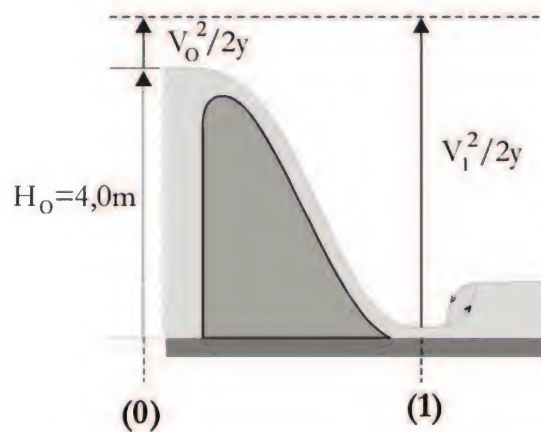
L'équation de Bernoulli s'écrit entre les points 0 et 1, en négligeant les pertes de charge :

$$H_0 + \frac{V_0^2}{2g} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 4 + 0 = 4; \text{ donc } V_1 = \sqrt{2g(4 - y_1)} \quad (1)$$

$$Q = V_1 A_1 = V_1 B y_1$$

$$10 = V_1 y_1 \times 10 \quad (2)$$

$$V_1 = \frac{1}{y_1}$$



En substituant (2) dans (1) on obtient :

$$2g y_1^3 - 8g y_1^2 + 1 = 0$$

$$19.62 y_1^3 - 78.48 y_1^2 + 1 = 0$$

Dont la solution est  $y_1 = 0,115m$

On trouve  $y_2$  en utilisant (5.51) :

$$0,115 y_2 \cdot \left( \frac{0,115 + y_2}{2} \right) = \frac{1^2}{9,81} = 0,10194$$

$$\text{soit : } y_2^2 + 0,115 y_2 - 1,773 = 0$$

La racine positive de cette équation donne  $y_2 = 1,275m$

## EXERCICES DU CHAPITRE 6

## Exercice 6.1

Selon la formule de Francis (6.16)

$$Q = 0,415 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left( L - \frac{H}{5} \right) \cdot H^{3/2}$$

$$Q = 0,415 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \left( 5 - \frac{0,30}{5} \right) \cdot 0,30^{3/2} = 1,492 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Selon la formule de Hégley

On calcule  $\mu$  par (6.17) :

$$\mu = \left[ 0,405 + \frac{0,0027}{0,30} - 0,03 \cdot \frac{5-3}{5} \right] \cdot \left[ 1 + 0,55 \cdot \left( \frac{5 \cdot 0,30}{3 \cdot (0,30 + 1,0)} \right)^2 \right] = 0,448$$

Selon l'équation (6.15) :

$$Q = 0,448 \cdot 5,0 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,30^{3/2} = 1,630 \text{ m}^3 / \text{s}$$

## Exercice 6.2

Selon la formule de Thomson (6.24) :

$$Q = 1,42 \cdot H^{5/2} \quad \text{donc : } H = \left( \frac{Q}{1,42} \right)^{2/5}$$

$$H = \left( \frac{0,060}{1,42} \right)^{2/5} = 0,282 \text{ m}$$

## Exercice 6.3

Formule de Francis :  $Q = 0,415 L \sqrt{2g} H^{3/2}$

Quand  $Q = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$   $H = 0,3 \text{ m}$

Comme  $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3}{2} \times 0,415 L \sqrt{2g} \frac{\Delta H}{H}$



$$\begin{aligned}
 \text{Donc} \quad \Delta Q &= \frac{3}{2} \times 0.415 L \sqrt{2g} \left( \frac{\Delta H}{H} \right) \times Q \\
 &= \frac{3}{2} \times 0.415 \times 0.5 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \frac{10^{-2}}{0.30} \times 0.15 \\
 \Delta Q &= 0.0068 \text{ m}^3/\text{s} \\
 \text{Soit} \quad \frac{\Delta Q}{Q} &= 4.54\%
 \end{aligned}$$

### Exercice 6.4

On calcule  $C_q$  selon (6.29) :

$$C_q = \frac{0,65}{1 + \frac{H}{\Delta Z}} = \frac{0,65}{1 + \frac{1,0}{2,0}} = 0,433$$

Le débit est obtenu de (6.28) :

$$Q = 1,7 \cdot C_q \cdot L \cdot H^{3/2} = 1,7 \cdot 0,433 \cdot 5,0 \cdot 1^{3/2} = 2,17 \text{ m}^3/\text{s}$$

## EXERCICES DU CHAPITRE 7

## Exercice 7.1

Méthode de Thiessen, formule (7.4) :

$$P = \frac{\sum S_i P_i}{A}$$

$$A = 2 \cdot 2 = 4$$

$$P = \frac{50 \text{ mm} \cdot 3/2 + 10 \text{ mm} \cdot 3/2 + 20 \text{ mm} \cdot 1}{4} = 27,5 \text{ mm}$$

Méthode arithmétique, formule (7.2) :

$$P = \frac{1}{n} \sum P_i = \frac{1}{3} (50 + 20 + 10) = 26,7 \text{ mm}$$

## Exercice 7.2

Selon (7.3) :

$$P = \frac{\sum A_i P_i}{A}$$

Intervalle (mm)	Moyenne (mm)	Superficie (km <sup>2</sup> )
40 à 60	50	600
20 à 40	30	300
0 à 20	10	200

$$P = \frac{50 \cdot 600 + 30 \cdot 300 + 10 \cdot 200}{1100} = 37,3 \text{ mm}$$

**Exercice 7.3**

Infiltration selon Horton (7.7) :

$$P = 40 \text{ mm} \times 2 = 80 \text{ mm}$$

$$F(t) = f_{\infty} t + \frac{(f_0 - f_{\infty})}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$F(t) = 2 \cdot 25 + \frac{(40 - 25)}{3} (1 - e^{-3 \cdot 2}) = 54,8 \text{ mm}; \text{ soit } 55 \text{ mm}$$

$$\text{Précipitations nettes} = P - F = 80 - 55 = 25 \text{ mm}$$

**Exercice 7.4**

Utilisant (7.5) et supposant que  $\phi < 20 \text{ mm/h}$

$$\left[ (20 - \phi) + (25 - \phi) + 2 \cdot (50 - \phi) + (75 - \phi) \right] \cdot \frac{1h}{2} = 30 \text{ mm}$$

Donc  $\phi = 32 \text{ mm/h}$ , en contradiction avec l'hypothèse  $\phi < 20 \text{ mm/h}$

Supposant  $20 \leq \phi \leq 25$

$$\frac{(25 - \phi) + 2(50 - \phi) + (75 - \phi)}{2} = 30$$

Donc  $\phi = 35 \text{ mm/h}$

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse de départ

Supposant  $25 \leq \phi \leq 50$

$$\frac{2(50 - \phi) + (75 - \phi)}{2} = 30$$

Donc  $\phi = 38,33 \text{ mm/h}$

Ce résultat est en accord avec l'hypothèse de départ



**Exercice 7.5**

Pressions de vapeur (tableau 7.2) :

$$e_{w1} (t = 20^{\circ}\text{C}) = 2,339 \text{ kPa (à la surface de l'eau)}$$

$$e_{w2} (t = 30^{\circ}\text{C}) = 4,244 \text{ kPa (à la saturation dans l'air)}$$

$$\text{Humidité relative} = 0.3 = \frac{e_a}{e_{w2}} = \frac{e_a}{4.244}$$

$$\text{Donc } e_a = 1,2732 \text{ kPa}$$

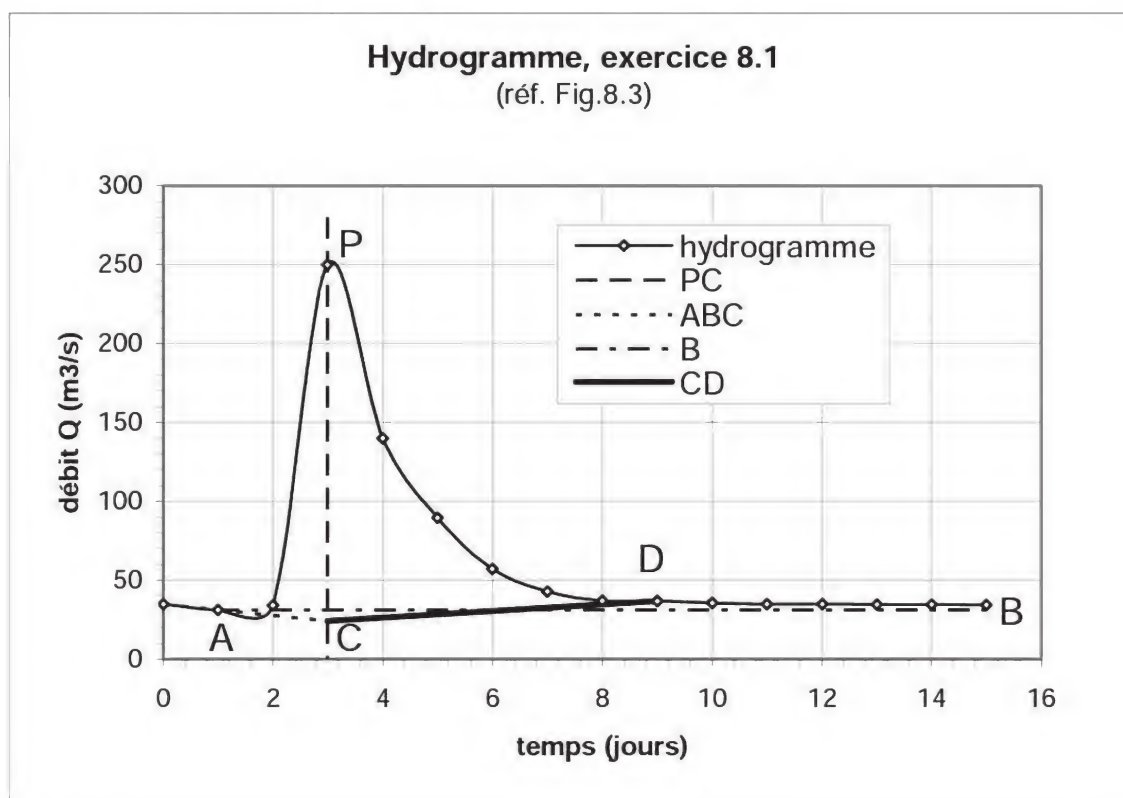
Évaporation journalière :

$$\begin{aligned} \text{Avec effet du vent (7.14) } E &= 3,66 (2,339 - 1,2732) \cdot (1 + 0,062 \times 30) \\ &= 11,15 \text{ mm} \end{aligned}$$

## EXERCICES DU CHAPITRE 8

## Exercice 8.1

Les données sont présentées graphiquement sur la figure suivante :



Les deux méthodes utilisées font référence à la figure 8.3.

La « méthode AB » considère comme ruissellement la partie de l'hydrogramme au-dessus de l'horizontale passant par le second point B, à partir de ce point.

Selon la « méthode ACD », le ruissellement est la partie de l'hydrogramme au-dessus de la ligne ACD.

Le point C est défini par l'intersection de la verticale PC passant par le débit de pointe, avec le prolongement de AB.

Le point D est indiqué par une soudaine variation dans la représentation logarithmique des débits dans la partie descendante de l'hydrogramme (voir tableau 2) : il s'agit des valeurs du jour 9.

En calculant les pentes des lignes AC et CD, on peut obtenir les limites inférieures de la portion de ruissellement pour la méthode ACD.

Pente de AC =  $(31,4 - 35)/1 = -3,6$  (pente descendante)

Équation de la ligne AC :  $Q = 35 - 3,6 \cdot J$

Point C : temps = jour 3 ,  $Q = 35 - 3,6 \cdot 3 = 24,2$

Pente de CD =  $(36,9 - 24,2)/(9 - 3) = 2,1167$

Équation de la ligne CD :  $Q = 24,2 + 2,1167 \cdot (J - 3)$

Jour J	Q(m <sup>3</sup> /s)	méthode AB	Ruissellement (m <sup>3</sup> /s) méthode AB	méthode ACD	Ruissellement (m <sup>3</sup> /s) méthode ACD
0	35	35	0	35	0
1	31,4	31,4	0	31,4	0
2	34,3	31,4	2,9	27,8	6,5
3	250	31,4	218,6	24,2	225,8
4	140	31,4	108,6	26,32	113,68
5	89,6	31,4	58,2	28,43	61,17
6	57,4	31,4	26	30,55	26,85
7	43	31,4	11,6	32,67	10,33
8	37,3	31,4	5,9	34,78	2,52
9	36,9	31,4	5,5	36,9	0
10	35,7	31,4	4,3	35,7	0
11	35,1	31,4	3,7	35,1	0
12	34,9	31,4	3,5	34,9	0
13	34,8	31,4	3,4	34,8	0
14	34,7	31,4	3,3	34,7	0
15	34,6	31,4	3,2	34,6	0

Tableau 1

Jour	Débit (m <sup>3</sup> /s)	Logarithme	Taux de variation
3	250	5,52	
4	140	4,94	0,58
5	89,6	4,49	0,45
6	57,4	4,05	0,44
7	43	3,76	0,29
8	37,3	3,61	0,15
9	36,9	3,608	0,002
10	35,7	3,575	0,033
11	35,1	3,558	0,017
12	34,9	3,552	0,006
13	34,8	3,549	0,002
14	34,7	3,546	0,002

Tableau 2



## Exercice 8.2

Selon la méthode rationnelle (8.5),  $Q = K \cdot C \cdot i \cdot A$

Scénario 1 :  $T_r = 15 \text{ min}$

$$Q_p = 60 \cdot (15/20) \cdot K \cdot C \cdot A = 45 \cdot K \cdot C \cdot A$$

$$V = (45 \cdot K \cdot C \cdot A) \cdot 20 = 900 \text{ KCA}$$

Scénario 2 :  $T_r = t_c = 20 \text{ min}$

$$Q_p = 50 \text{ KCA}$$

$$V = 50 \text{ KCA} \cdot 20 = 1000 \text{ KCA}$$

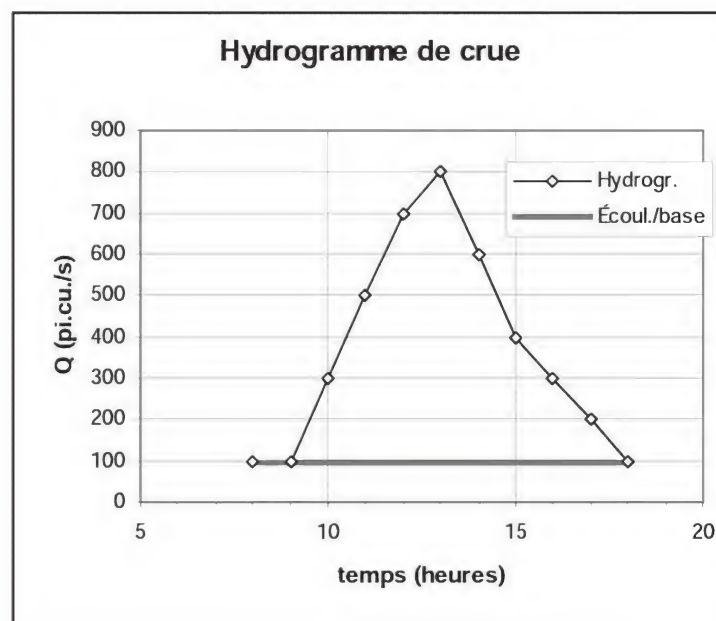
Scénario 3 :  $T_r = 25 \text{ min} > t_c$

$$Q_p = 40 \text{ KCA}$$

$$V = 40 \text{ KCA} \cdot (20 + 5) = 1000 \text{ KCA}$$

- 1° Scénario 2 a le débit de pointe le plus élevé.
- 2° Scénario 2 et 3 ont le volume de ruissellement le plus élevé.

## Exercice 8.3



L'écoulement de base est  $Q_B = 100 \text{ pi}^3/\text{s}$

- a) Ruissellement de surface débute entre 9 h et 10h et finit entre 17h et 18h.
- b) Selon la formule (7.5) : ruissellement direct (de surface) =  $(i - \phi) \cdot \Delta t$

$$5 \text{ po} = (2,75 \text{ po/h} - \phi) \cdot 2 \text{ h}$$

Donc,  $\phi = 0,25 \text{ po/h}$

c) Débit de ruissellement =  $Q - Q_{\text{Base}}$

Lame de ruissellement en 2 heures = 5po.

Pour l'hydrogramme unitaire de l'averse de 2 heures :

$$HU_2 = (Q - Q_{\text{Base}})/5$$

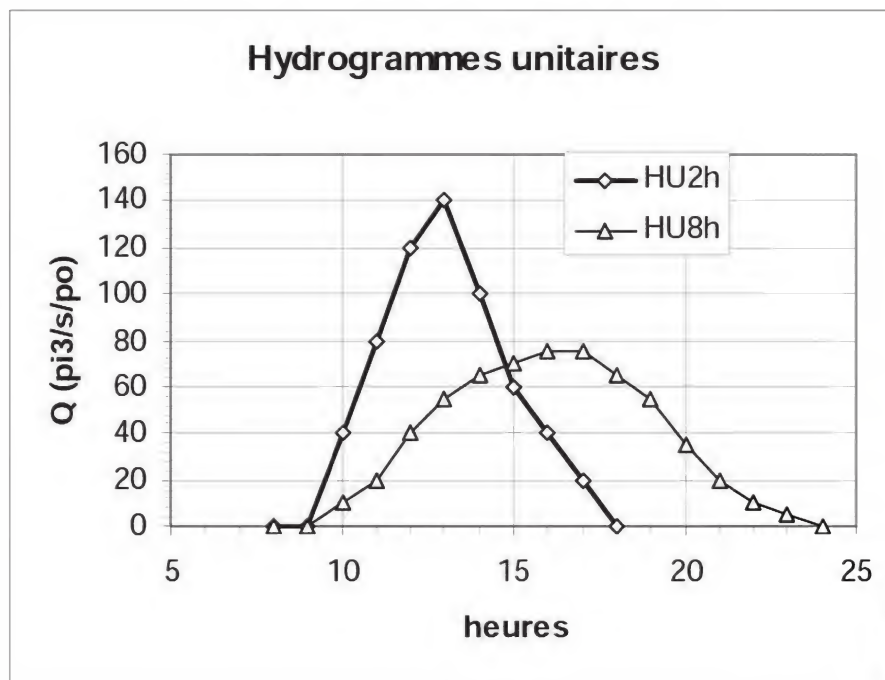
heures	Q(pi.cu./s)	Ruiss.	HU(2h)
8	100	0	0
9	100	0	0
10	300	200	40
11	500	400	80
12	700	600	120
13	800	700	140
14	600	500	100
15	400	300	60
16	300	200	40
17	200	100	20
18	100	0	0

d) Temps de base :  $T_B = 9h = \Delta t + t_c$   
 Où  $\Delta t$  est la durée de la pluie et  $t_c$  est le temps de concentration.  
 Donc  $t_c = T_B - \Delta t = 9h - 2h = 7h$ .

e) Pour une pluie de  $\Delta t = 8h$ ,  $T_B = \Delta t + t_c = 8h + 7h = 15h$   
 Donc le ruissellement cesserait à  $9h + 15h = 24h$ .

f) En calculant l'hydrogramme unitaire de 8 heures, on constate que le débit de pointe se produit à 16h et a la valeur unitaire de  $75\pi^3/s$ .

Le débit de pointe réel est donc  $75\pi^3/s \cdot 2,5 \cdot 8 + Q_{\text{Base}} = 1600\pi^3/s$ .



### Exercice 8.4

$$\begin{aligned}
 1- \quad Q_p &= \frac{KCIA}{0,0028 \text{ CIA}} \\
 &= 0,0028 \times 0,6 \times \frac{2228}{20+13} \times 50 \\
 &= 5,67 \text{ m}^3/\text{s}
 \end{aligned}$$

$$2- \quad Q(5 \text{ min.}) = Q_p \times \frac{5}{20} = 1,42 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$3- \quad Q(15 \text{ min.}) = Q_p \times \frac{15}{20} = 4,25 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$4- \quad Q(42 \text{ min.} > 2 \times t_c) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$5- \quad Q_p(T_r = 15 \text{ min.}) = 0,0028 \times 0,6 \times \frac{2228}{15+13} \times 50 \times \frac{15}{20}$$



$$Q_p = 5,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$6- \quad Q(5 \text{ min}) = Q_p \times \frac{5}{15} = 1,67 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$7- \quad Q(25 \text{ min}) = \frac{10}{15} Q_p = 3,34 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$8- \quad Q(40 \text{ min}) = 0$$

$$9- \quad Q_p (T_r = 25 \text{ min.}) = 0,0028 \times 0,6 \times 50 \times \frac{2228}{25+13} = 4,92 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$10- \quad Q(20 \text{ min.}) = 4,92 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$11- \quad Q(25 \text{ min.}) = 4,92 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$12- \quad Q(45 \text{ min.}) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

### Exercice 8.5

Avant :

D'après (8.11)

$$t_c = 3,26 \cdot (1,1 - C) \cdot \frac{\sqrt{L}}{S^{0,333}} = 3,26 \cdot (1,1 - 0,3) \cdot \frac{\sqrt{3250}}{2,5^{0,333}} = 109,58 \text{ min}$$

$$A = 5 \text{ km}^2 = 500 \text{ ha}$$

$$\text{Selon (8.5), } Q = 0,0028 \cdot C \cdot A \cdot i = 0,0028 \cdot 0,3 \cdot 500 \cdot 22,19 = 9,32 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Utilisant la formule (5.14) :

$$D = \left( \frac{n \cdot Q}{0,3117 \cdot S^{1/2}} \right)^{3/8} = \left( \frac{0,014 \cdot 9,32}{0,3117 \cdot 0,01^{1/2}} \right)^{3/8} = 1,71 \text{ m}$$

Après :

$$C = 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,9 = 0,6$$

$$t_c = 3,26 \cdot (1,1 - 0,6) \cdot \frac{\sqrt{3250}}{2,5^{0,333}} = 68,49 \text{ min}$$

$$i = \frac{2743}{68,49 + 14} = 33,26 \text{ mm/h}$$

$$Q = 0,0028 \cdot 0,6 \cdot 500 \cdot 33,26 = 27,93 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Le diamètre nécessaire pour une conduite pleine sans mise en charge est

$$D = \left( \frac{0,014 \cdot 27,94}{0,3117 \cdot 0,01^{1/2}} \right)^{3/8} = 2,58 \text{ m}$$

Le développement a donc eu pour résultat de tripler le débit que la conduite originale n'est plus capable d'évacuer. Le diamètre requis pour satisfaire le débit après développement devrait être de plus de 1 mètre supérieur à celui de la conduite originale. L'inondation est ainsi expliquée.

### Exercice 8.6

- Aire du bassin de drainage :  $R = 1 \text{ mm}$  pour hydrogramme unitaire

$$V_R = \frac{Q_P \times t_B \times 3600}{2} = 10 \begin{matrix} A & R \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{aire, en ha} & \text{hauteur de ruissellement, en mm} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{180 \times Q_P \times t_B}{R} = \frac{180 \times 0,01 \times 6}{1} = 10,8 \text{ ha}$$

$$\Rightarrow A = 10,8 \text{ ha}$$

- Hydrogramme de ruissellement direct :  $h_j = i_j \times \Delta t = i_j \times 1 = i_j$

t h	$h_j$ mm	(HU)1h $\text{m}^3/\text{s}/\text{mm}$	$h_{1x}$ (HU)1h $\text{m}^3/\text{s}$	$h_{3x}$ (HU)1h $\text{m}^3/\text{s}$	$h_{4x}$ (HU)1h $\text{m}^3/\text{s}$	Ruissellement total $\text{m}^3/\text{s}$
0	---	0	0			0
1	25	0,005	0,125			0,1250
2	0	0,010	0,250	0		0,2500
3	75	0,0075	0,1875	0,375	0	0,5625
4	25	0,005	0,125	0,750	0,125	1,0000
5		0,0025	0,0625	0,5625	0,250	0,8750
6		0	0	0,375	0,1875	0,5625
7				0,1875	0,125	0,3125
8				0	0,0625	0,0625
9						0

- Temps de base  $T_B = 9$  heures

### Exercice 8.7

D'après (8.6) :  $Q = K \cdot C \cdot i \cdot A = 0,0028 \cdot 0,5 \cdot i \cdot 20 = 2,0$

Donc  $i = 71,429 \text{ mm/h}$

D'après la figure 8.4, pour une fréquence de 1 par 5ans :

$$i = \frac{2184,4}{t_c + 12} = 71,429$$

$$\text{Donc, } t_c = \frac{2184,4 - 12 \cdot 71,429}{71,429} = 18,6 \text{ minutes}$$



**Exercice 8.8**

D'après (8.6) :  $Q = K \cdot C \cdot i \cdot A$

Pour l'ensemble du bassin:

Supposons une fréquence de 1/5ans, selon la figure 8.4 :

$$i = \frac{2184,4}{25+12} = 59,0 \text{ mm/h}$$

$$\text{Donc, } Q = 0,0028 \cdot 0,5 \cdot 59,0 \cdot 100 = 8,3 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Pour la partie imperméable :

$$i = \frac{2184,4}{7+12} = 114,97 \text{ mm/h}$$

$$\text{Donc, } Q = 0,0028 \cdot 0,9 \cdot 114,97 \cdot 40 = 11,6 \text{ m}^3 / \text{s}$$

C'est donc le débit dû à la partie imperméable qui doit être retenu, soit  $Q = 11,0 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**Exercice 8.9**

La courbe HU1 sur le graphe ci-joint représente un hydrogramme unitaire imaginaire d'une heure (HU<sub>1h</sub>) :

Durée de l'averse =  $\Delta t_1 = 1$  heure

Débit de pointe  $Q_{p1} = 100$  unités

Temps de la pointe  $T_{p1} = 2$  h

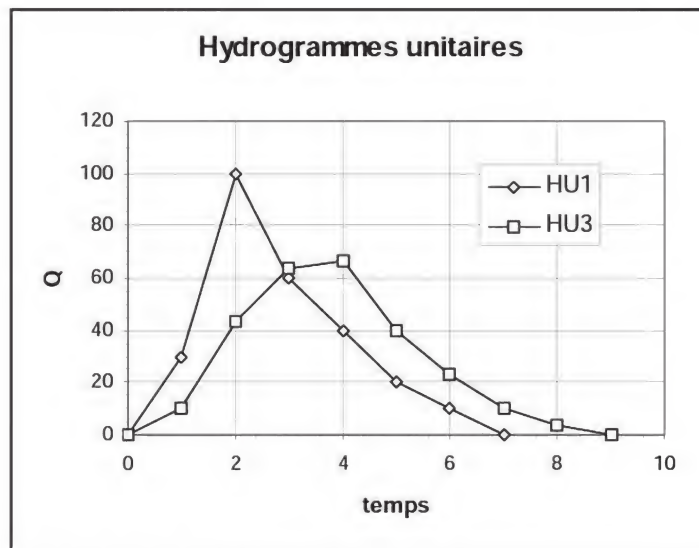
Temps de base  $T_{B1} = 7$  h

Intensité =  $i_1$

La courbe HU3 représente l'hydrogramme unitaire de 3 heures (HU<sub>3h</sub>) sur le même bassin quand une averse de 3 heures produit le même ruissellement total :

$\Delta t_2 = 3$  heures

$i_3 = i_1/3$

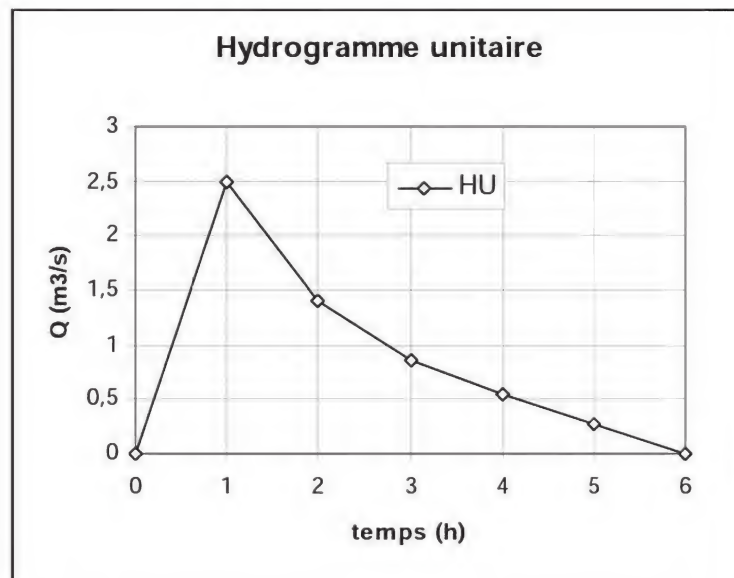


$$Q_{p2} = 65 \text{ unités} < Q_{p1}$$

$$T_{p2} = 4h = T_{p1} + 2h$$

$$T_{B2} = 9h = T_{B1} + 2h$$

### Exercice 8.10



Le volume de ruissellement est :

$$V = [(0 + 2,5) + (2,5 + 1,4) + (1,4 + 0,85) + (0,85 + 0,55)] \times \frac{3600}{2} = 20088 \text{ m}^3$$

$$A \times 1\text{mm} = V \quad \text{donc} \quad A = V \times 10^3$$

$$A = 20,088 \text{ km}^2$$

**Exercice 8.11**

Volume total de ruissellement = aire sous l'hydrogramme =  $594000\text{m}^3$

Lame de ruissellement = volume / surface =  $594000\text{m}^3 / (4500 \times 10000\text{m}^2) = 0,01322\text{m}$

Soit 13,22mm.

L'hydrogramme unitaire d'une heure (HU1) est obtenu en divisant les débits de l'hydrogramme fourni par 13,22mm.

t	(HU) 1h	(HU) 1h	Total	(HU) 2h
1	1,475	0	1,475	0,737
2	3,40	1,475	1,875	2,437
3	2,27	3,40	5,67	2,835
4	1,70	2,27	3,97	1,985
5	1,286	1,70	2,986	1,493
6	0,945	1,286	2,231	1,115
7	0,640	0,945	1,585	0,792
8	0,378	0,640	1,018	0,51
9	0,265	0,378	0,643	0,321
10	0,113	0,265	0,378	0,189
11	0	0,113	0,113	0,056

**Exercice 8.12**

- 1) Utilisant l'hydrogramme fourni, le volume de ruissellement est :

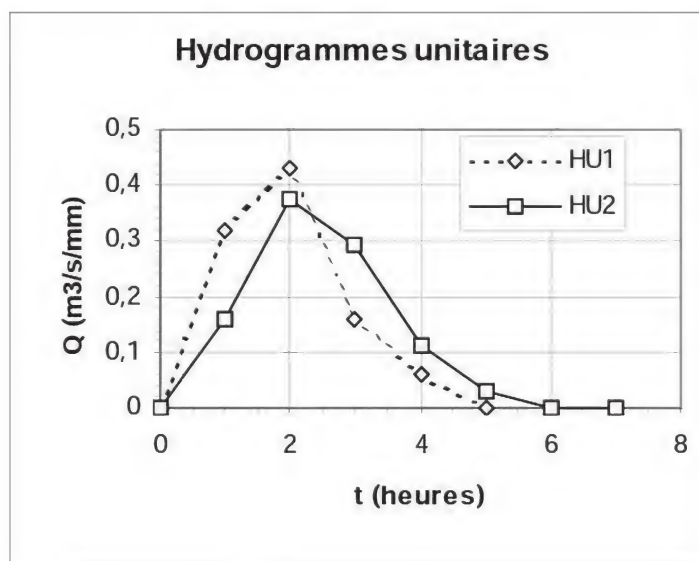
$$V = [(3,2 + 4,3 + 1,6 + 0,6)\text{m}^3 / \text{s} / \text{cm}] \cdot 3600\text{s} = 34920\text{m}^3 / \text{cm}$$

$$\text{La superficie est } A = \frac{V}{\text{lame}} = \frac{34920\text{m}^3 / \text{cm}}{0,01\text{m} / \text{cm}} = 3,492 \cdot 10^6 \text{m}^2, \text{ soit } 3,492\text{km}^2.$$

Utilisant le principe de superposition, on obtient l'hydrogramme unitaire de 2 heures (HU)2h à partir de l'hydrogramme unitaire d'une heure (HU)1h, dans les unités (m<sup>3</sup>/s/cm) comme suit :



Temps (heures)	(HU)1h (m <sup>3</sup> /s/cm)	(HU)1h (m <sup>3</sup> /s/cm)	(HU)2h (HU1+HU1)/2
0	0	0	0
1	3,2	0	1,6
2	4,3	3,2	3,75
3	1,6	4,3	2,95
4	0,6	1,6	1,1
5	0	0,6	0,3
6	0	0	0



- 2) On construit l'hydrogramme pour la pluie de huit heures à intensité variable en utilisant l'hydrogramme unitaire de 2 heures pour chaque période de 2 heures.

Facteur de pondération pour les 2 premières heures =  $f_1 = (2 \times 0,6) = 1,2$

Facteur de pondération pour les 2 heures suivantes =  $f_2 = (2 \times 0,3) = 0,6$

Facteur de pondération pour les 2 heures suivantes =  $f_3 = (2 \times 0,5) = 1$

Facteur de pondération pour les 2 dernières heures =  $f_4 = (2 \times 0,5) = 1$

On obtient ainsi l'hydrogramme unitaire de 8 heures HU8 :

t(heures)	HU2	f1 f1*HU2	f2 f2*HU2	f3 f3*HU2	f4 f4*HU2	Ruissellement total
0	0	0	0	0	0	0
1	1,6	1,92	0	0	0	1,92
2	3,75	4,5	0	0	0	4,5
3	2,95	3,54	0,96	0	0	4,5
4	1,1	1,32	2,25	0	0	3,57
5	0,3	0,36	1,77	1,6	0	3,73
6	0	0	0,66	3,75	0	4,41
7	0	0	0,18	2,95	1,6	4,73
8			0	1,1	3,75	4,85
9				0,3	2,95	3,25
10				0	1,1	1,1
11					0,3	0,3
12					0	0

La durée du ruissellement direct est de 12 heures.

La lame de ruissellement direct est :

$$lame = \frac{V}{A} = \frac{10658,8 m^3 / mm}{3,492 \cdot 10^6 m^2} \cdot 1000 mm / m = 3,05 mm$$

### Exercice 8.13

- 1) Le débit de base est estimé à  $Q_B = 20 m^3/s$  en début de ruissellement et  $30 m^3/s$  à la fin du ruissellement.

HU<sub>1h</sub> est obtenu en soustrayant  $Q_B$  de l'hydrogramme fourni puis en divisant toutes les ordonnées par 10 mm.

- 2) HU<sub>2h</sub> est obtenu de HU<sub>1h</sub> par le principe de superposition : (HU<sub>1h</sub> + HU<sub>1h</sub> décalé d'une heure)/2 (voir tableau 1 ci-joint).

T (heures)	(HU) 1h	(HU) 1h	Total	(HU) 2h
0	0		0	
1	8	0	8	4
2	18	8	26	13
3	40	18	58	29
4	50	40	90	45
5	42	50	92	46
6	30	42	72	36
7	23	30	53	26,5
8	18	23	41	20,5
9	13	18	31	15,5
10	8	13	21	10,5
11	5	8	13	6,5
12	2	5	7	7,5
13	0	2	2	1
14	0	0	0	0

Tableau 1

- 3) Volume = surface sous l'hydrogramme unitaire multipliée par la lame de ruissellement en mètres et par la durée de l'averse en secondes (voir tableau 1):

Pour HU<sub>1h</sub> : Volume = 9252 10<sup>2</sup> m<sup>3</sup>

Pour HU<sub>2h</sub> : Volume = 9252 10<sup>2</sup> m<sup>3</sup>

Débits de pointe :

Pour HU<sub>1h</sub> : Q<sub>p</sub> = 50m<sup>3</sup>/s à 4h

Pour HU<sub>2h</sub> : Q<sub>p</sub> = 46m<sup>3</sup>/s à 5h

- 4) Lame nette des 2 premières heures = 40mm – 2h · 15mm/h = 10mm  
 Lame nette des 4 heures suivantes = 80mm – 4h · 15mm/h = 20mm, soit 10mm par 2h.  
 Lame nette totale de la pluie de 6 heures = 30mm.  
 En utilisant l'hydrogramme unitaire de 2 heures

Temps heures	(HU)2h×10 m <sup>3</sup> /s	(HU)2h×10 m <sup>3</sup> /s	(HU)2h×10 m <sup>3</sup> /s	Ruissellement total m <sup>3</sup> /s
1	80	0	0	80
2	180	0	0	180
3	400	80	0	480
4	500	180	0	680
5	420	400	80	900
6	300	500	180	980
7	230	420	400	1050
8	180	300	500	980
9	130	230	420	780
10	80	180	300	560
11	50	130	230	410
12	20	80	180	280
13	0	50	130	180
14	0	20	80	100
15	0	0	50	50
16	0	0	20	20
17		0	0	0

Tableau 2



## EXERCICES DU CHAPITRE 9

## Exercice 9.1

1) Avec  $\chi = 0,5$  et  $\Delta t = 1j$ Supposant  $K = 1$ 

$$\text{Formule (9.11) : } c_0 = \frac{-K\chi + 0,5 \cdot \Delta t}{K \cdot (1 - \chi) + 0,5 \cdot \Delta t} = \frac{-1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1}{1 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 1} = 0$$

$$\text{Formule (9.12) : } c_1 = \frac{K \cdot \chi + 0,5 \cdot \Delta t}{K \cdot (1 - \chi) + 0,5 \cdot \Delta t} = \frac{1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1}{1 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 1} = 1$$

$$\text{Formule (9.13) : } c_2 = \frac{K \cdot (1 - \chi) - 0,5 \cdot \Delta t}{K \cdot (1 - \chi) + 0,5 \cdot \Delta t} = \frac{1 \cdot (1 - 0,5) - 0,5 \cdot 1}{1 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 1} = 0$$

On calcule l'hydrogramme de sortie par la formule (9,10)

$$O_{i+1} = c_0 \cdot I_{i+1} + c_1 \cdot I_i + c_2 \cdot O_i$$

Les résultats sont montrés dans la quatrième colonne du tableau présenté plus bas.

Avec  $\chi = 0$  et  $\Delta t = 1j$ Supposant  $K = 1$ On refait les calculs et on obtient :  $c_0 = c_1 = c_2 = 0,333$ 

Les résultats sont montrés dans la cinquième colonne du tableau présenté plus bas.

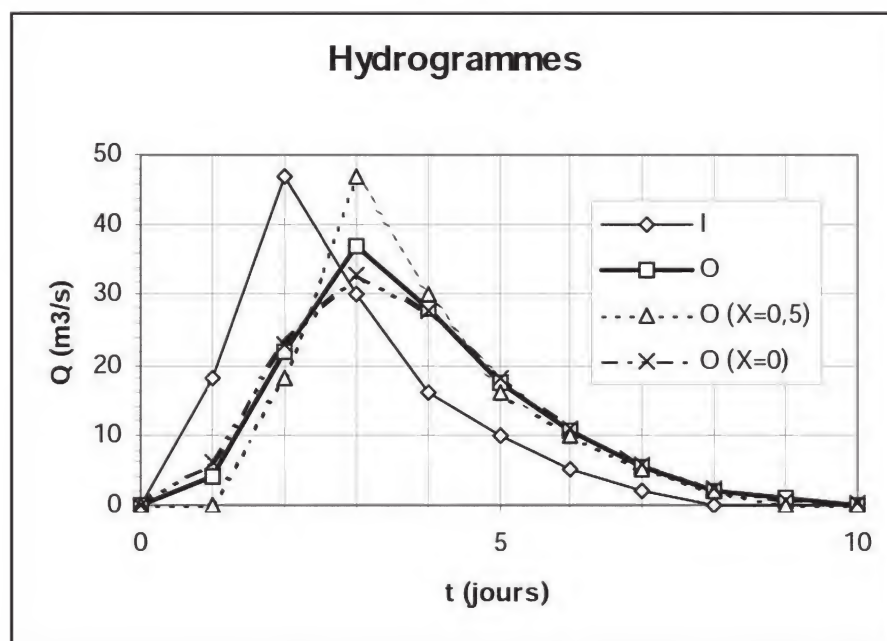


Figure a

Sur la figure a, on peut voir les hydrogrammes donnés ainsi que les deux hydrogrammes de sortie calculés avec  $K = 1$  et avec  $\chi = 0,5$  et  $0$ . On constate que les hydrogrammes calculés estiment particulièrement mal les débits de pointe.

t(j)	I(m <sup>3</sup> /s)	O(m <sup>3</sup> /s)	$\chi = 0,5$	$\chi = 0$	$\chi = 0,3$	$\chi = 0,2$
			O(m <sup>3</sup> /s)	O(m <sup>3</sup> /s)	O(m <sup>3</sup> /s)	O(m <sup>3</sup> /s)
0	0	0	0	0	0	0
1	18	4	0	6	0	4,15
2	47	22	18	23	20,5	21,46
3	30	37	47	33	40	37,31
4	16	28	30	27,67	28,83	28,38
5	10	17,5	16	18	17	17,38
6	5	10,5	10	10,83	10,42	10,58
7	2	5,6	5	5,83	5,42	5,58
8	0	2	2	2,53	2,27	2,37
9	0	1	0	0,67	0,33	0,46
10	0	0	0	0,33	0,17	0,23

- 2) Les résultats des calculs refaits avec  $\chi = 0,3$  et  $0,2$  sont montrés dans les deux dernières colonnes du tableau.

On voit sur la figure b que ces deux derniers hydrogrammes de sortie se superposent avantageusement à l'hydrogramme donné, celui avec  $\chi = 0,2$  étant le meilleur.

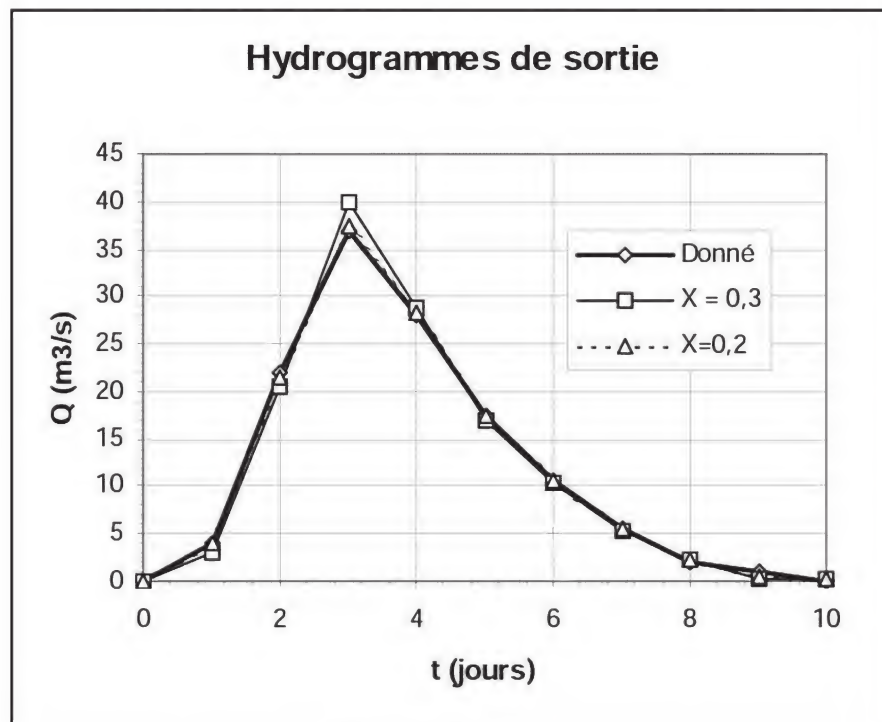


Figure b

On peut vérifier les valeurs de  $K$  avec la formule (9.15). Les valeurs moyennes sont proches de 1 (la valeur utilisée). Pour  $\chi = 0,2$  la valeur moyenne de  $K$  est 1. Ces valeurs sont les plus appropriées parmi celles essayées.

## Exercice 9.2

1) Les hydrogrammes représentant les valeurs mesurées sont montrés sur la figure a :

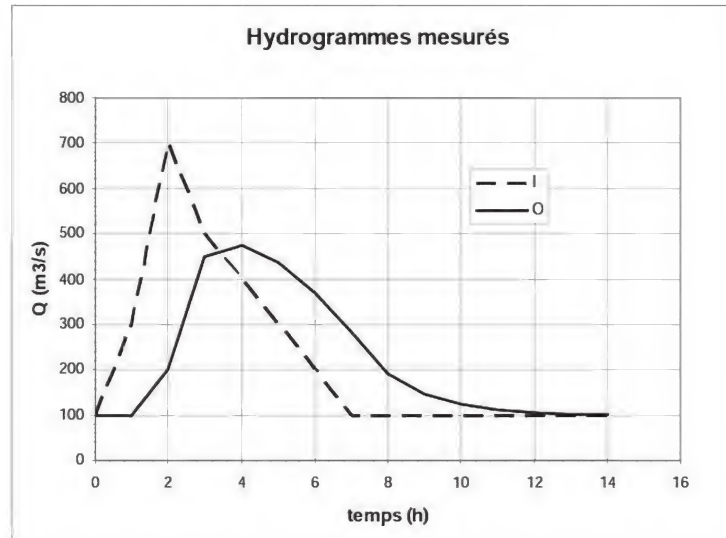


Figure a

Il s'agit de trouver le modèle qui représente le mieux l'hydrogramme de sortie O.

On écrit l'équation (9.10) pour  $O_2$ ,  $O_3$  et  $O_4$  :

$$100 = c_0 \cdot 300 + c_1 \cdot 100 + c_2 \cdot 100$$

$$200 = c_0 \cdot 700 + c_1 \cdot 300 + c_3 \cdot 100$$

$$450 = c_0 \cdot 500 + c_1 \cdot 700 + c_3 \cdot 200$$

On peut simplifier par 100 :

$$3c_0 + c_1 + c_2 = 1$$

$$7c_0 + 3c_1 + c_2 = 2$$

$$5c_0 + 7c_1 + 2c_2 = 4,5$$

La solution de ces trois équations simultanées donne

$$c_0 = 0 \quad c_1 = 0,5 \quad c_2 = 0,5$$

On écrit l'équation (9.11) pour K, avec  $\Delta t = 1h$  et  $c_0 = 0$  :

$$K = \frac{0,5 \cdot \Delta t \cdot (1 - c_0)}{c_0 - \chi \cdot c_0 + \chi} = \frac{0,5}{\chi}$$

En choisissant 3 valeurs de  $\chi$ , les valeurs correspondantes de K et des c sont :

$\chi$	0,20	0,25	0,30
K	2,5h	2h	1,667h
$c_0$	0	0	0
$c_1$	0,4	0,5	0,6
$c_2$	0,6	0,5	0,4



Le tableau suivant montre les résultats des calculs des hydrogrammes de sortie pour les trois valeurs de  $\chi$ , en utilisant l'équation (9.10) :

t (heures)	O ( $\chi = 0,20$ )	O ( $\chi = 0,30$ )	O ( $\chi = 0,25$ )
0	100	100	100
1	100,00	100,00	100
2	180,00	220,00	200
3	388,00	508,00	450
4	432,80	503,20	475
5	419,68	441,28	437,5
6	371,81	356,51	368,75
7	303,08	262,60	284,4
8	221,85	165,04	192,2
9	173,11	126,02	146,1
10	143,87	110,41	123,05
11	126,32	104,16	111,5
12	115,79	101,67	105,75
13	109,48	100,67	102,9
14	105,69	100,27	101,45
MOYENNES	219,43	219,99	219,91

Ces hydrogrammes de sortie (O) sont montrés sur la figure b. On constate que l'hydrogramme calculé pour  $\chi = 0,25$  correspond parfaitement à l'hydrogramme mesuré.

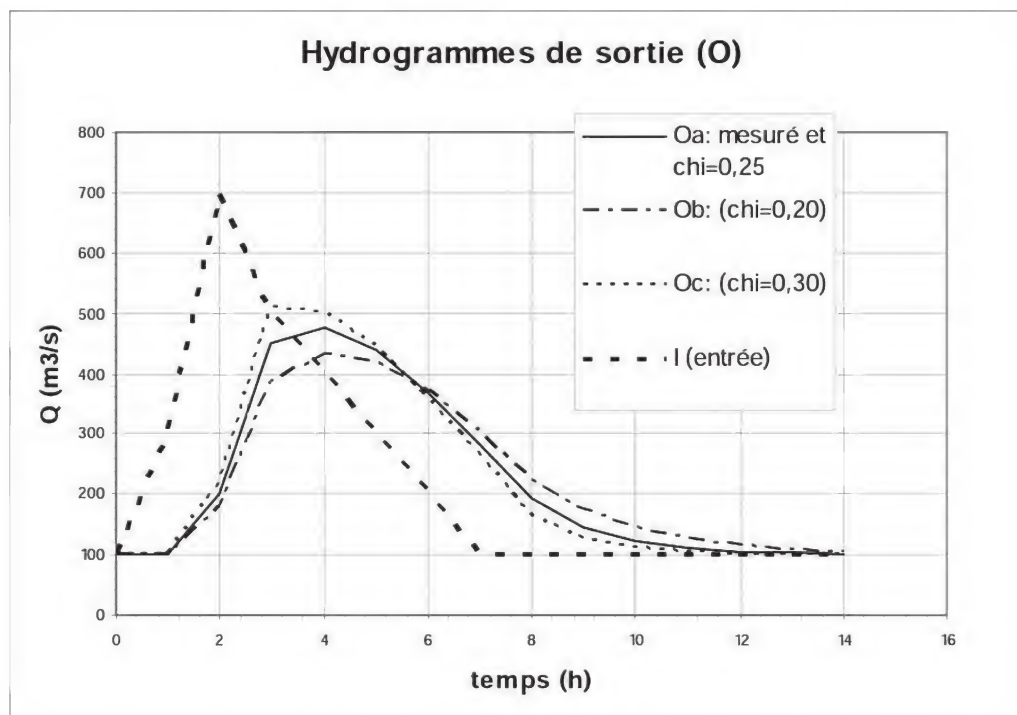


Figure b

La confirmation est obtenue en utilisant les critères de Nash (équation 8.38) :

$\chi$	0,20	0,30	0,25
NASH	0,9684	0,9772	1,000

Le meilleur modèle a donc les caractéristiques suivantes :

$$K = 2,0\text{h} \quad \chi = 0,25 \quad c_0 = 0 \quad c_1 = 0,5 \quad c_2 = 0,5$$

- 2) On utilise les meilleures valeurs de  $(K, \chi)$  trouvées plus haut et les formules (9.10) à (9.14) pour calculer le nouvel hydrogramme de sortie (O2) tel que montré sur la figure c.

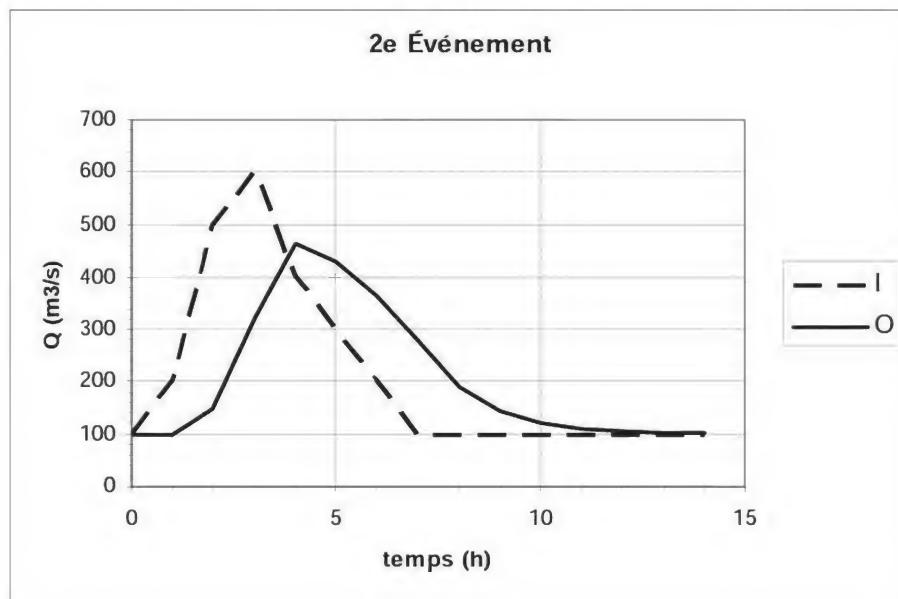


Figure c

### Exercice 9.3

$$\text{Hauteur initiale} = H_0 = \left( \frac{Q_0}{4,8} \right)^{2/3} = \left( \frac{20}{4,8} \right)^{2/3} = 2,589\text{m}$$

$$\text{Volume initial} = S_0 = H_0 \cdot A = 2,589\text{m} \cdot 2,0 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 5,178 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

$$H_{\max} = \left( \frac{Q_{\max}}{4,8} \right)^{2/3} = \left( \frac{340}{4,8} \right)^{2/3} = 17,1\text{m}$$

Pour des valeurs de H allant de  $H_0$  à  $H_{\max}$ , on calcule  $S = H \cdot A$ . On calcule O par

$$O = 4,8 \cdot H^{3/2} \text{ et on calcule } \frac{2S}{\Delta t} + O, \text{ tel que montré sur le tableau 1.}$$

H (m)	S (m <sup>3</sup> )	O (m <sup>3</sup> /s)	2S/Δt+O
2,589	5,179E+06	20,000	259,756
3	6,000E+06	24,942	302,719
4	8,000E+06	38,400	408,770
5	1,000E+07	53,666	516,629
6	1,200E+07	70,545	626,101
7	1,400E+07	88,897	737,045
8	1,600E+07	108,612	849,352
9	1,800E+07	129,600	962,933
10	2,000E+07	151,789	1077,715
11	2,200E+07	175,118	1193,636
12	2,400E+07	199,532	1310,643
13	2,600E+07	224,986	1428,690
14	2,800E+07	251,439	1547,736
15	3,000E+07	278,855	1667,744

Tableau 1

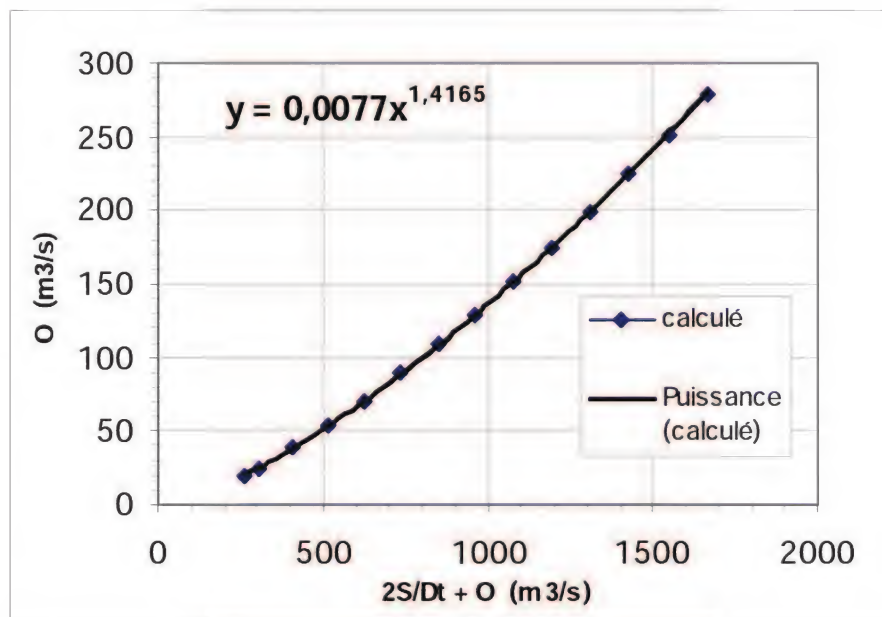


Figure a

La figure a montre O en fonction de  $(2S/\Delta t + O)$ , dont on déduit la corrélation :

$$O = 0,0077 \cdot \left( \frac{2 \cdot S}{\Delta t} + O \right)^{1,4186} \quad (a)$$

On calcule l'hydrogramme laminé suivant la procédure décrite à l'application 9.2, tel que montré au tableau 2.



t (h)	I(m <sup>3</sup> /s)	I <sub>1</sub> +I <sub>2</sub>	2S/Δt+O	(2S/Δt+O) - 2O	O (m <sup>3</sup> /s)
0	20		259,76	219,76	20,26
		60			
12	40		279,76	234,74	22,51
		130			
24	90		364,74	299,19	32,77
		290			
36	200		589,19	459,89	64,65
		500			
48	300		959,89	701,76	129,07
		640			
60	340		1341,76	926,93	207,42
		630			
72	290		1556,93	1044,81	256,06
		500			
84	210		1544,81	1038,33	253,24
		350			
96	140		1388,33	952,96	217,69
		225			
108	85		1177,96	832,99	172,48
		135			
120	50		967,99	706,77	130,61
		90			
132	40		796,77	598,50	99,14

Tableau 2

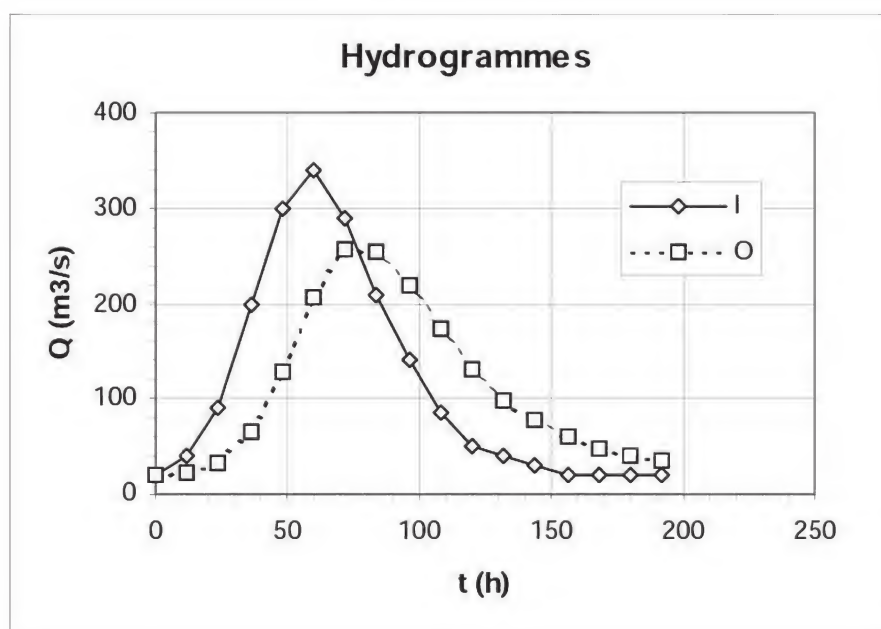


Figure b

## EXERCICES DU CHAPITRE 10

## Exercice 10.1

$$\bar{X} = 940 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\sigma = 425 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Selon l'équation (10.28) :  $Q_T = \bar{X} + K\sigma$

On calcule K selon l'équation (10.29) :

Pour T = 20 ans

$$K = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{20}{20-1} \right) \right] \right\} = 1,866$$

$$Q_{20} = 940 + 1,866 \cdot 425 = 1733 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Pour T = 100 ans

$$K = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{100}{100-1} \right) \right] \right\} = 3,137$$

$$Q_{100} = 940 + 3,137 \cdot 425 = 2273 \text{ m}^3 / \text{s}$$

## Exercice 10.2

T = 20 ans

D'après (10.2),  $P(Q < Q_T) = 1 - 1/T = 1 - 1/20 = 0,95$

Distribution Log-normale : d'après le tableau 10.8, Z = 1,645

D'après (10.31),  $\log(Q_{20}) = 2,95 + 1,645 (0,25) = 3,361$

$$Q_{20} = 10^{3,361} = 2297 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Distribution Log-Pearson : on obtient K du tableau 10.9 pour P = 0,95 et  $C_s = 1,02$

K = 2,10,  $\log(Q_{20}) = 2,95 + 2,10 (0,25) = 3,475$

$$Q_{20} = 10^{3,475} = 2985 \text{ m}^3 / \text{s}$$

T = 50 ans

P = 1 - 1/50 = 0,98.

Distr. Log-normale : Z = 2,06,  $\log(Q_{50}) = 3,465$ ,  $Q_{50} = 2917 \text{ m}^3 / \text{s}$

Distr. Log-Pearson : K = 2,542,  $\log(Q_{50}) = 3,586$ ,  $Q_{50} = 3850 \text{ m}^3 / \text{s}$

T = 100 ans

F = 1 - 1/100 = 0,99

Distr. Log-normale : Z = 2,33,  $\log(Q_{100}) = 3,533$ ,  $Q_{100} = 3408 \text{ m}^3 / \text{s}$

Distr. Log-Pearson : K = 3,022,  $\log(Q_{100}) = 3,7055$ ,  $Q_{100} = 5076 \text{ m}^3 / \text{s}$

**Exercice 10.3**

On calcule la moyenne par l'équation (10.11), l'écart-type par (10.12) et le coefficient d'asymétrie par (10.13) pour les débits et les logarithmes des débits :

$$\bar{Q} = 246,6061 \quad \sigma = 169,0 \quad C_s = 1,818$$

$$M = 2,30506 \quad S = 0,2805 \quad C_s = 0,0267$$

Pour les procédés et les traitements des données, voir les Applications 10.2 à 10.6.

10 ans

$$T=10 \quad F(Z) = 1 - 1/T = 1 - 1/10 = 0,90$$

*Loi normale* : du tableau 10.8,  $Z = 1,282$

$$Q_{10} = \bar{Q} + Z \cdot \sigma = 246,61 + 1,282 \cdot 169 = 463,19 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi log-normale* (voir Application 10.4) :

$$\log(Q_{10}) = M + Z \cdot S = 2,30506 + 1,282 \cdot 0,2805 = 2,6645$$

$$Q_{10} = 10^{2,6645} = 461,83 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi Log-Pearson* : du tableau 10.9,  $K = 1,282$

$$\log(Q_{10}) = 2,30506 + 1,282 \cdot 0,2805 = 2,6645$$

$$Q_{10} = 10^{2,6645} = 461,96 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi de Gumbel* : équations (10.28) et (10.29)

$$K = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \left\{ 0,5772 + \ln \left[ \ln \left( \frac{10}{9} \right) \right] \right\} = 1,3046$$

$$Q_{10} = 246,61 + 1,3046 \cdot 169 = 467,07 \text{ m}^3 / \text{s}$$

On procède de la même façon pour les autres périodes.

50 ans  $T = 50 \quad F(Z) = 0,98$

*Loi normale*

$$Z = 2,035$$

$$Q_{50} = 593,7 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi log-normale*

$$\log(Q_{50}) = 2,8671$$

$$Q_{50} = 760,4 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi Log-Pearson*

$$K = 2,054$$

$$Q_{50} = 760,5 \text{ m}^3 / \text{s}$$

*Loi de Gumbel*

$$K = 2,5923$$

$$Q_{50} = 684,7 \text{ m}^3 / \text{s}$$



100 ans  $T = 100$   $F(Z) = 0,99$

*Loi normale*

$$Z = 2,33$$

$$Q_{100} = 639,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

*Loi log-normale*

$$\log(Q_{100}) = 2,9486$$

$$Q_{100} = 906,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

*Loi Log-Pearson*

$$K = 2,326$$

$$Q_{100} = 906,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

*Loi de Gumbel*

$$K = 3,1367$$

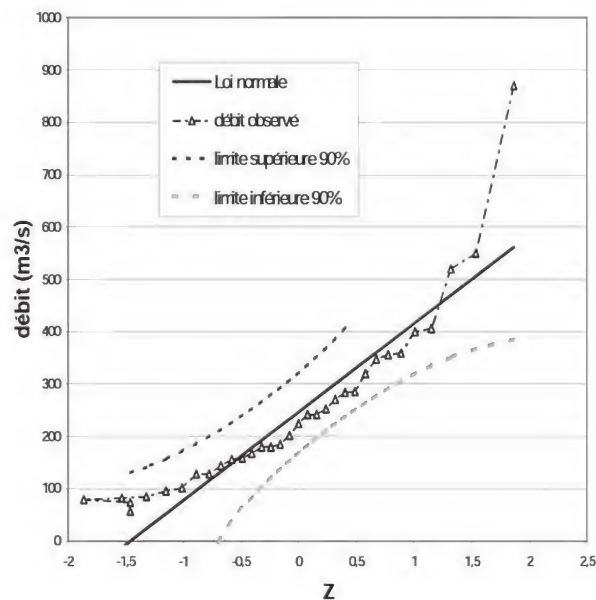
$$Q_{100} = 776,7 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pour les présentations graphiques, on prépare un tableau en ordonnant les débits selon les valeurs décroissantes et on calcule les valeurs centrées réduites selon les différentes distributions.

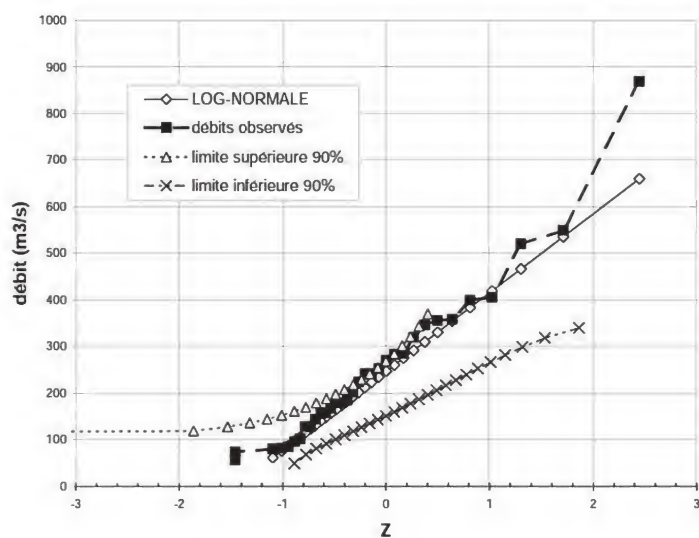
Voici un échantillon partiel du tableau :

Année	Q (m <sup>3</sup> /s)	Rang	Q (m <sup>3</sup> /s)	Z	Log(Q)
1	185	1	870	3,68872	2,93952
2	85	2	550	1,79523	2,74036
3	168	3	520	1,61772	2,71600
4	82,5	4	406	0,94316	2,60853
5	180	5	400	0,90766	2,60206
6	550	6	359	0,66505	2,55509
7	128,5	7	356,5	0,65026	2,55206
8	224,5	8	347,5	0,59701	2,54095
9	359	9	320	0,43428	2,50515
10	80	10	285,5	0,23014	2,45561

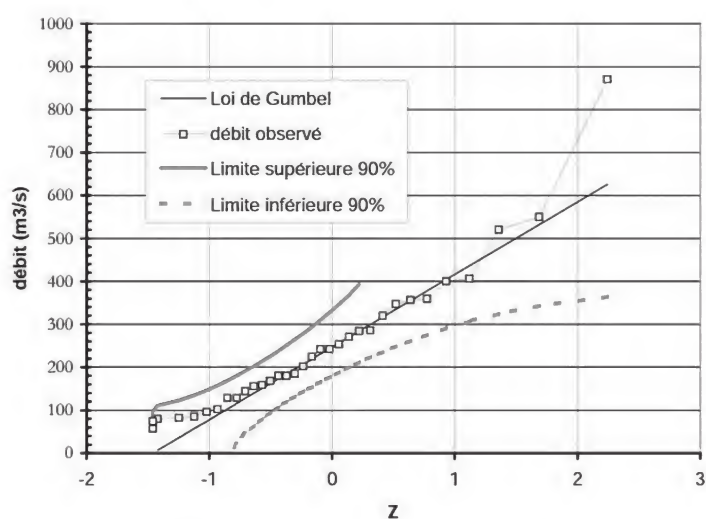
Ajustement de la loi normale



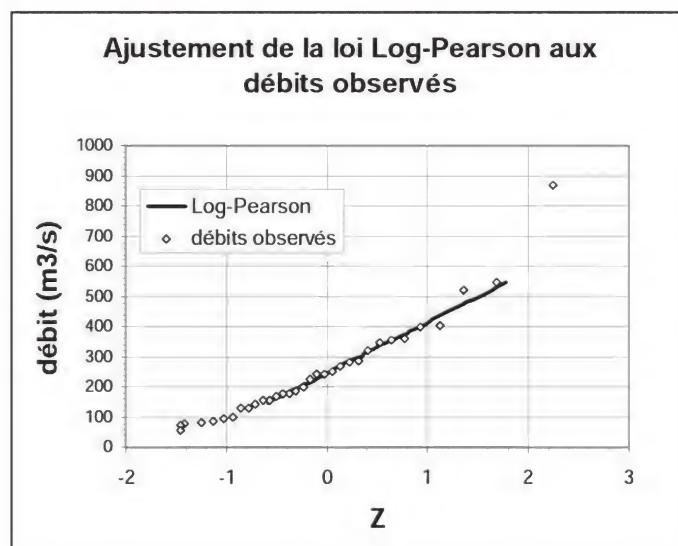
Ajustement d'une distribution Log-Normale aux débits observés



Ajustement de la loi de Gumbel aux débits observés



La loi Log-Pearson semble être la mieux ajustée.



**Exercice 10.4**

$$a) \quad P = \frac{1}{T} = \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3} = 0,5\% = P(Q \geq Q_t)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = (1 - p)^n = (1 - 0,005)^5 = 0,975$$

$$P(X \geq 1) = 1,0 - 0,975 = 0,025$$

$$b) \quad P(X = 1) = C_5^1 \cdot p^1 \cdot (1 - p)^4 = 5 \cdot 0,005 \cdot (1 - 0,005)^4 = 0,024$$

$$c) \quad f\left(3, \frac{1}{200}\right) = \frac{1}{200} \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)^2 = 0,0049$$

$$d) \quad P(X = 0) = (1 - p)^5 = 0,975$$

**Exercice 10.5**

$$a) \quad T = \frac{50}{3} = 16,7 \text{ ans} \approx 17 \text{ ans}$$

$$b) \quad P(\text{dépassement}) = \frac{1}{T} = 0,06$$

$$c) \quad P(\text{non dépassement}) = 1 - 0,06 = 0,94$$

$$d) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,94^5 = 0,27$$

e)

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^3 C_{50}^i P^i q^{50-i} = 0,94^{50} + 50 \cdot 0,06 \cdot 0,94^{49} \\ + 1225 \cdot 0,06^2 \cdot 0,94^{48} + 19600 \cdot 0,06^3 \cdot 0,94^{47}$$

$$P(X \leq 3) = 0,65$$

$$f) \quad P(X = 3) = C_{50}^3 \cdot p^3 \cdot q^{50-3} = 0,23$$



**Exercice 10.6**

1)  $T = 100 \text{ ans}$

$$P = \frac{1}{T} = 0,01 \rightarrow 1\% \text{ de chance}$$

2)  $P(X=1) = C_{100}^1 \cdot 0,01 \cdot 0,99^{99} = 0,37$

Soit 37% de chance d'avoir une seule crue centenaire pendant les 100 prochaines années.

3)  $P(X=1) = C_{1000}^1 \cdot 0,001 \cdot 0,999^{999} = 0,37$

Soit 37% de chance d'avoir une seule crue millénaire pendant les 1000 prochaines années.

4) On a donc toujours 37% de chance d'avoir une seule crue de période de retour  $T$  pendant les  $T$  prochaines années.









*Hydraulique et hydrologie* est un ouvrage original qui regroupe des notions qu'on ne retrouve pas traditionnellement réunies dans un même livre. Il permet à l'étudiant aussi bien qu'à l'ingénieur praticien d'acquérir les notions fondamentales qui sont à la base du design hydraulique et hydrologique.

Dans la partie hydraulique, cet ouvrage traite des écoulements sous pression et à surface libre, des pompes et des stations de pompage, du coup de bélier dans les conduites gravitaires et de refoulement, ainsi que des écoulements à travers les déversoirs et les orifices.

Dans la partie hydrologie, il couvre l'estimation des différentes composantes du cycle hydrologique, les modèles de transformation pluie-fonte-débit, les laminages naturel et artificiel des crues et la modélisation statistique du risque hydrologique.

Le professeur **SAAD BENNIS**, ing., Ph. D., a obtenu son doctorat en mécanique en 1983 à l'Institut national polytechnique de Toulouse en France, puis le Ph. D. en génie civil en 1987 à l'Université de Sherbrooke au Canada. Il a ensuite travaillé chez Hydro-Québec comme conseiller en modélisation.

En 1989, l'auteur a intégré l'École de technologie supérieure pour y enseigner, aux différents cycles, la mécanique des fluides, la thermodynamique, l'hydraulique et l'hydrologie, ainsi que la conception et la réhabilitation des égouts et des aqueducs. En parallèle, il a mené plusieurs projets de recherche subventionnés et commandités par l'industrie. La réalisation de ces projets a permis un avancement sensible des connaissances en hydrologies urbaine et rurale, le développement de logiciels utilisés par l'industrie, la publication de plusieurs textes scientifiques et la formation d'étudiants aux deuxième et troisième cycles.

